

1918.

No. 19.

GENERAL LIBRARY  
JAN 30 1919  
ANNÄLEN  
DER  
PHYSIK.

BEGRIFFEN UND FORTGEFÜHRT DURCH

F. A. C. GREN, L. W. GILBERT, J. C. POGGENDORFF, G. U. E. WIEDEMANN, P. DRUDE.

VIERTE FOLGE.

Band 57. Heft 3

DER GANZEN REIHE 362. BANDES 3. HEFT.

KURATORIUM:

M. PLANCK, G. QUINCKE  
W. C. RÖNTGEN, W. VOIGT, E. WARBURG.

UNTER MITWIRKUNG  
DER DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT

HERAUSGEGEBEN VON

W. WIEN UND M. PLANCK.



LEIPZIG.

VERLAG VON JOHANN AMBROSIUS BARTH.  
DÖRRIENSTRASSE 16.

Bestellungen auf die „Annalen“ werden von allen Buchhandlungen, von den Postämtern und von der Verlagsbuchhandlung angenommen. Preis für den in 24 Heften (= 3 Bänden) ausgegebenen Jahrgang 54 M.  
Ausgegeben am 29. Oktober 1918.



# Inhalt.

	Seite
1. R. Bär, Über die atomistische Struktur der Elektrizität . . . . .	161
2. Ragnar Lundblad, Über einige Grundbegriffe in der Optik diapergierender Medien . . . . .	183
3. Alfred Wegener, Elementare Theorie der atmosphärischen Spiegelungen . . . . .	203
4. G. Borelius, Zur Elektronentheorie der Thermoelektrizität . . . . .	231
5. O. Lehmann, Über die Ionenwanderung in den flüssigen Kristallen von Ammoniummoleathydrat . . . . .	244

Die Redaktion der Annalen wird von den umseitig genannten Herren besorgt. Den geschäftlichen Teil hat Herr Geh. Hofrat Prof. W. Wien übernommen, an den auch Manuskripte zu senden sind. Seine Adresse ist: **Würzburg, Pleichherring 8.**

Es wird gebeten, die Manuskripte **druckfertig** einzuliefern und in den Korrekturen den beim Druck für sie verwendeten Raum nicht zu überschreiten.

Die Verlagsbuchhandlung liefert 100 **Sonderabdrücke** jeder Arbeit kostenfrei. Falls ausnahmsweise mehr gewünscht werden, so muß dies bei Rücksendung des ersten Korrekturbogens an die Druckerei auf dessen erster Seite bemerkt werden. Alle anderen, die Sonderabdrücke betreffenden Mitteilungen bittet man an die Verlagsbuchhandlung zu richten.

Anderweitiger **Abdruck** der für die Annalen bestimmten Abhandlungen oder Übersetzung derselben innerhalb der gesetzlichen Schutzfrist ist nur mit Genehmigung der Redaktion und Verlagsbuchhandlung gestattet.

Die **Zeichnungen** sind in möglichst sorgfältiger Ausführung den Abhandlungen auf besonderen Blättern beizulegen (nicht in das Manuskript selbst einzuziehen). Da die Figuren fortan möglichst in den Text eingefügt werden sollen, ist die Stelle des Manuskriptes recht genau anzugeben, wo sie hingehören.

**Zitate** sind am Rande oder unten auf den Seiten des Manuskriptes (nicht in dem Text selbst) und zwar möglichst in der in den „*Fortschritten der Physik*“ üblichen Form mit Angabe des Namens und Vornamens, der Band-, Seiten- und Jahressahl aufzuführen.



1

1

E  
M  
u  
z  
d  
d  
t  
u  
K

W  
P  
e  
n  
I  
f  
s  
s  
d  
s

v  
e  
d  
n  
T  
(  
o  
P

# ANNALEN DER PHYSIK.

## VIERTE FOLGE. BAND 57.

### 1. Über die atomistische Struktur der Elektrizität; von R. Bär.

Die Bestimmung der Größe des Elementarquantums der Elektrizität kann folgendermaßen geschehen: Man bringt ein Metall-, Wasser- oder Ölteilchen von mikroskopischer oder ultramikroskopischer Größenordnung zwischen die beiden horizontal aufgestellten Platten eines Kondensators und hält es dort freischwebend, indem man das Schwerefeld der Erde durch ein gleich starkes, aber entgegengesetzt gerichtetes elektrisches Feld kompensiert. Hat das Teilchen die Masse  $m$  gr und die Ladung  $e$  elektrostat. Einh., und ist die elektrische Kraft in elektrostat. Einh.  $\mathfrak{E}$  — es ist

$$\mathfrak{E} = \frac{V}{300 d},$$

wenn  $V$  das in Volt gemessene, an die Platten angelegte Potential und  $d$  cm deren Abstand bedeutet —, so befindet es sich im Gleichgewicht, wenn  $mg = e\mathfrak{E}$  ist. Ändert man nun die Ladung des Teilchens entweder durch Ionisation der Luft im Kondensator mit Hilfe eines Ra-Präparates oder, falls das Teilchen lichtelektrisch empfindlich ist, durch Bestrahlen desselben mit ultraviolettem Licht, so muß, damit sich das Teilchen nun wieder im Gleichgewicht befindet, auch die elektrische Kraft  $\mathfrak{E}$  geändert werden, und zwar so, daß sich die Ladungen

$$e : e_1 : e_2 : \dots = \frac{1}{\mathfrak{E}} : \frac{1}{\mathfrak{E}_1} : \frac{1}{\mathfrak{E}_2} : \dots$$

verhalten. Will man nun *absolute Messungen* der Ladungen  $e, e_1, e_2$  vornehmen, so muß man noch die unbekannte Masse  $m$  des Teilchens bestimmen. Dies geschieht nur unter Zuhilfenahme irgendeiner neuen Hypothese. Z. B. kann man das Teilchen frei fallen lassen und die Masse unter Annahme der Gültigkeit des Stokesschen Widerstandsgesetzes berechnen, oder man berechnet die Teilchengröße aus der Brownschen Bewegung des Teilchens unter Annahme der Gültigkeit der Einsteinschen Formel, oder endlich berechnet man den Durch-

messer des Teilchens aus der Farbe des abgebeugten Lichtes, indem man sich auf die Miesche Beugungstheorie stützt.

Sind die einzelnen Ladungen  $e, e_1, e_2 \dots$  Multipla  $n\epsilon, n_1\epsilon, n_2\epsilon \dots$  einer Elementarladung  $\epsilon$ , so ist

$$\frac{1}{\epsilon} : \frac{1}{\epsilon_1} : \frac{1}{\epsilon_2} \dots = n : n_1 : n_2 \dots$$

Die Zahlen  $n, n_1, n_2 \dots$  sind dabei eindeutig bestimmt als die kleinsten ganzen Zahlen, die im gleichen Verhältnis zueinander stehen wie die reziproken Werte der Feldstärken oder der unmittelbar abzulesenden Haltepotentiale  $V, V_1, V_2 \dots$  Man kann also die atomistische Struktur der Elektrizität schon an solchen Relativmessungen der Ladungen eines Teilchens prüfen. Die Größe der Grundladung selbst, d. h. das Elementarquantum  $\epsilon$  der Elektrizität, findet man aber erst unter Zuhilfenahme einer der drei erwähnten Zusatzhypotesen.

Relativmessungen, d. h. Versuche, die Ladungen des einzelnen Teilchens als Multipla einer unbekannten Elementarladung darzustellen, sind u. a. von Ehrenhaft<sup>1)</sup>, E. Meyer u. W. Gerlach<sup>2)</sup>, Konstantinowsky<sup>3)</sup> und von Joffé<sup>4)</sup>, angestellt worden. Ehrenhaft<sup>5)</sup> fand z. B., daß sich die Ladungen eines bestimmten Hg-Teilchens verhielten wie die kleinen ganzen Zahlen

$$+2 : +3 : +2 : +1 : -2 : -3 : -2 : -1 : -2 : -1.$$

Doch legte er diesen Versuchen später kein Gewicht mehr bei. Er spricht vielmehr<sup>6)</sup> die Ansicht aus: „Die Beobachtung zeigte, daß bei enger gezogenen Grenzen der Messung den Versuchsbedingungen nur immer durch größere Zahlen (Viel-

1) F. Ehrenhaft, Sitzungsber. d. Wiener Akad. Math.-nat. Kl. Abt. IIa. 123. p. 53. 1914.

2) E. Meyer u. W. Gerlach, Ann. d. Phys. 45. p. 177. 1914.

3) D. Konstantinowsky, Sitzungsber. d. Wiener Akad. Abt. IIa. 123. p. 1697. 1914.

4) A. Joffé, Sitzungsber. d. Münch. Akad. p. 19. 1913.

5) I. c. p. 82 u. 104.

6) F. Ehrenhaft, Physik. Zeitschr. 15. p. 358. 1917. — *Anmerkung bei der Korrektur:* Noch prägnanter formuliert Ehrenhaft seinen Standpunkt in der Zusammenfassung am Schluß seiner neuesten Arbeit (Ann. d. Phys. 56. p. 72. 1918): „Schließlich wird nachgewiesen, daß die vermeintlichen ganzzahligen Verhältnisse der Ladungen, welche ein Probekörper bei Umladungen hintereinander annimmt („loi des multiples entiers“) rein arithmetische, nur aus dem Rechenverfahren und nicht aus dem Wesen der Elektrizität entspringende sind und eine konstruierte Beziehung darstellen.“

fachheiten der Ladung, d. h. komplizierterer Zusammensetzung aus eventuell elementaren Quanten) genügt werden kann, so daß die Ladungen, aus welchen die Elektrizitätsmengen auf den Probekörpern nach den Versuchen aufgebaut sein könnten, immer kleiner werden.“ Derselben Ansicht ist Konstantinowsky<sup>1)</sup>, der auch die Versuche von E. Meyer u. W. Gerlach, die Verhältnisse der gemessenen Haltepotentiale eines Teilchens bei verschiedenen Ladungen darzustellen als Verhältnisse reziproker ganzer Zahlen

$$\frac{1}{n} : \frac{1}{n_1} : \frac{1}{n_2} : \dots$$

für nicht bindend erklärt, da die Potentialsprünge (Ladungsänderungen) klein sind im Verhältnis zu den Haltepotentien und infolgedessen die Zahlen  $n, n_1, n_2 \dots$  relativ groß (über 20) werden. Nun sind die Resultate von E. Meyer u. W. Gerlach bei den von ihnen verwendeten Pt- und Cu-Teilchen nur nebenher gewonnen worden, und es sagen die genannten Forscher auch ausdrücklich<sup>2)</sup>, daß solchen Versuchen um so mehr Gewicht zukommt, je kleiner die Zahlen  $n_i$  sind.

Gegen die Beobachtungen von Joffé läßt sich dieser Einwand nicht erheben. Seine Teilchen haben  $n_i = 1, 2, 3 \dots$  als kleinste Zahl von hypothetischen Elementarquanten zur Ladung. Dagegen kann man mit Recht gegen seine Messungen einwenden (Konstantinowsky), daß die Methode, ein Potential einzustellen, bei dem das Teilchen in einer bestimmten Zeit keine merkliche Vertikalbewegung ausführt, noch kein Maß für die Meßgenauigkeit liefert, daß man vielmehr entweder

1. die Schwebespannung  $V$  zwischen zwei Werte  $\bar{V}$  und  $V$  einengen muß, bei denen das Teilchen bzw. steigt und fällt, oder
2. die Genauigkeit jeder einzelnen Messung, d. h. die Empfindlichkeit der Einstellung bestimmen muß.

Es ergibt sich daher die Aufgabe, die Haltepotentiale solcher Teilchen, die infolge ihrer kleinen Masse — wenn die Elektrizität überhaupt atomistisch aufgebaut ist — schon bei einer Ladung von 1 oder 2 Elektronen durch das zur Verfügung stehende elektrische Feld von maximal ca. 1000 Volt schwabend gehalten werden können, nach diesen beiden Methoden zu bestimmen. *Es sollte also die Richtigkeit der Vor-*

1) D. Konstantinowsky, Ann. d. Phys. 48. p. 57. 1915.

2) l. c. p. 186.

stellung von der atomistischen Struktur der Elektricität nochmals dadurch geprüft werden, daß man eine möglichst große Zahl kleinsten Ladungen eines Teilchens, die durch oft wiederholte Aufladungen und Entladungen erzeugt werden, daraufhin untersuche, ob die zu diesen Ladungen gehörenden Schwebespannungen sich innerhalb der ebenfalls zu bestimmenden Fehlergrenzen verhalten wie die reciproken, kleinsten ganzen Zahlen.

Gegen solche Messungen können die von Konstantinowsky gegen E. Meyer u. W. Gerlach und gegen A. Joffé erhobenen Einwände nicht mehr vorgebracht werden; denn bei ihnen sind die *Potentialsprünge von der Größenordnung des Haltepote ntials selbst*, und man erhält ein genaues Maß für die Größe des möglichen Beobachtungsfehlers. Für die Größe der zu solchen Messungen geeigneten Teilchen gibt es bei der gegebenen zur Verfügung stehenden Spannung und den gegebenen Apparatdimensionen ein Optimum, da schwerere Teilchen nur durch relativ große Ladungen schwebend gehalten werden können, während sich bei zu kleinen Teilchen die Brownsche Bewegung bei der Bestimmung der Schwebespannung störend bemerkbar macht. Teilchen aus einem Material mit kleinem spezifischen Gewichte haben vor gleich schweren Teilchen eines spezifisch schweren Materials noch den Vorzug, leichter sichtbar zu sein, und so kamen als spezifisch leichteste, lichtelektrisch empfindliche Stoffe Aluminium und Magnesium in Betracht. Letzteres erwies sich (vgl. p. 181) als ungeeignet, und es wurden die endgültigen Versuche ausschließlich mit Aluminiumteilchen angestellt.

#### § 1. Versuchsanordnung.

Die Versuchsanordnung ist im wesentlichen der von E. Meyer u. W. Gerlach<sup>1)</sup> angegebenen nachgebildet; auch stand zu Vorversuchen der daselbst<sup>2)</sup> beschriebene Kondensator zur Verfügung. Zu den endgültigen Versuchen wurde ein aus drei Messingplatten  $P_1$ ,  $P_2$  und  $P_3$  bestehender Kondensator (vgl. Fig. 1) benutzt. Die beiden Platten  $P_1$  und  $P_3$  (100 : 100 : 5 mm) waren durch vier Schrauben auf einem 15 mm hohen, 15 mm dicken Ebonitrahmen befestigt. Die beiden Platten und der Rahmen schließen also den Konden-

1) E. Meyer u. W. Gerlach, Ann. d. Phys. 45, p. 178. 1914.

2) l. c. p. 179.

sator nach außen ab. Auf der unteren Platte  $P_1$  ruhte nun, auf vier exakt 10 mm lange Bernsteinstifte leicht aufgelegt, die Messingplatte  $P_2$  (70 : 70 : 5 mm). Zwischen  $P_2$  und  $P_3$  stellte eine Pt-Feder elektrischen Kontakt her, so daß das elektrostatische Feld zwischen den beiden Platten  $P_1$  und  $P_2$  erzeugt werden konnte.<sup>1)</sup> Dieser aus drei Platten

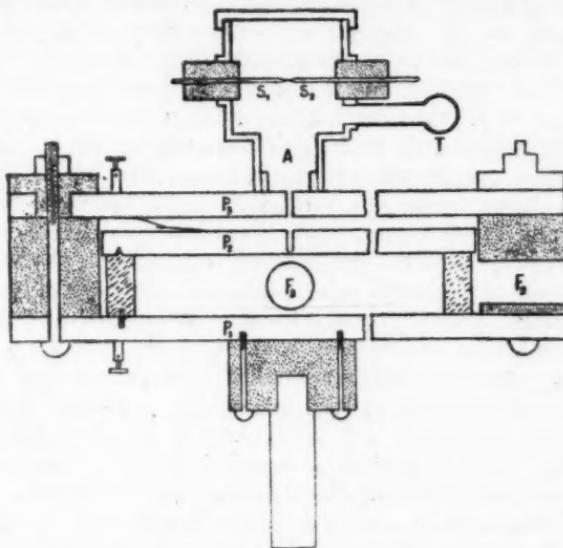


Fig. 1.

bestehende Kondensator hat gegenüber den gewöhnlichen Zweiplattenkondensatoren den Vorteil, daß der Abstand zwischen  $P_1$  und  $P_2$  sehr bequem genau zu messen sowie absolut unveränderlich ist und daher das Feld homogen bleibt, ohne

1) Der Plattenabstand von 10 mm hat gegenüber dem Abstand von 15,5 mm bei E. Meyer u. W. Gerlach den Vorteil, daß mit derselben Spannung stärkere Felder erzeugt also größere Teilchen in Schwebefeld gehalten werden können und daß die Einstellung auf das Haltepotential empfindlicher ist, da bei demselben Fehler in der Einstellung die auf das Teilchen wirkenden bewegenden Kräfte in den beiden Kondensatoren sich verhalten wie

$$\frac{1}{10} : \frac{1}{15,5}.$$

Rücksicht darauf, wie stark die Schrauben, welche  $P_1$  und  $P_3$  an dem Ebonitrahmen befestigen, angezogen werden. Die einander zugekehrten Flächen der Platten  $P_1$  und  $P_3$  waren eben geschliffen und hochglanzpoliert, einerseits, um das etwa auf die Platten auffallende Licht des Lichtstrahls, der das im Kondensator schwebende mikroskopische Teilchen beleuchtete, gut zu reflektieren und so eine Erwärmung des Kondensators zu verhüten, andererseits aber auch, um möglichste Homogenität des elektrischen Feldes zu gewährleisten. Dieselbe war wichtig, damit man die aus irgendwelchen Gründen etwa vorkommenden Lageänderungen der Al-Partikel im Kondensator während der bis zu 7 Stunden dauernden Beobachtungen nicht zu berücksichtigen brauchte. Die beiden Platten  $P_2$  und  $P_3$  hatten in der Mitte Bohrungen von bzw. 0,1 mm und 1 mm Durchmesser. Auf  $P_3$  war der zylindrische Aufsatz  $A$  aufgeschraubt, in welchen die beiden Al-Stifte  $S_1$  und  $S_2$  isoliert eingeführt werden konnten. Über den ca. 0,5 mm betragenden Zwischenraum zwischen den Stiften, der sich genau senkrecht über den Bohrungen in  $P_2$  und  $P_3$  befand, ließ man einen elektrischen Funken springen, erzeugt durch den auf höhere Spannung transformierten städtischen Wechselstrom von 110 Volt. Dieser Funke riß aus den Al-Stiften neutrale sowie elektrisch geladene Partikeln von mikroskopischer und ultramikroskopischer Größe los, welche durch die Bohrungen in  $P_2$  und  $P_3$  in den Kondensator gelangten. An dem Aufsatz  $A$  war ferner das Trockengefäß  $T$  angebracht — in welchem sich etwas Phosphorpentoxyd ( $P_2O_5$ ) oder Chlorcalcium ( $CaCl_2$ ) befand —, da es sich zeigte, daß in nichtgetrockneter Luft bei der Al-Zerstäubung sich auf den Messingplatten ein Niederschlag — wahrscheinlich Al-Nitrid<sup>1)</sup> ( $AlN$ ) — bildete, dort allmählich zersetzte und so die Politur der Platten  $P_1$  und  $P_2$  zerstörte.

Die untere Platte  $P_1$  des Kondensators wurde entweder mit dem positiven Pol einer Zehnderschen Hochspannungsbatterie oder mit Erde verbunden (vgl. Schaltungsschema Fig. 2). Der negative Pol der Batterie von 960 Volt, veränderlich in Stufen von je 40 Volt, lag an dem Schleifkontakt

1) Daß beim Erhitzen von Al-Elektroden durch den elektrischen Strom in einer Stickstoffatmosphäre  $AlN$  gebildet wird, wurde von Arons, Naturw. Rundschau 14. p. 453, nachgewiesen.

des Ruhstratwiderstandes  $R$  von 1800 Ohm, an dessen beiden Enden die Pole der 70-Volt-Batterie des Institutes lagen. Der negative Pol dieser Batterie war geerdet und ebenso die Platten  $P_2$  und  $P_3$  des Kondensators. Dergestalt war eine kontinuierliche Änderung der Spannung von 0—1030 Volt möglich. Gemessen wurde die angelegte Spannung vermittelst eines Präzisionszehntelmillivoltmeters von Siemens & Halske (dessen Eichung kontrolliert wurde), und zwar konnte an der Skala noch ein Volt abgeschätzt werden. Beobachtet wurden diejenigen positiv geladenen Al-Teilchen, welche eine hinreichend

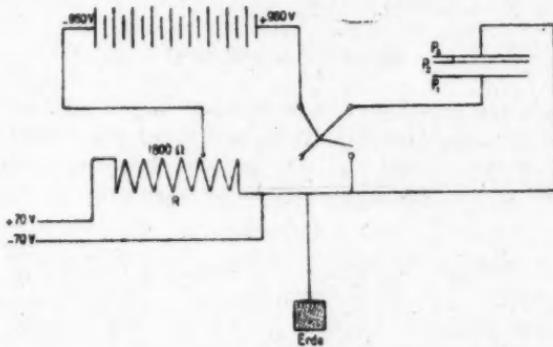


Fig. 2.

große Ladung besaßen, um mit höchstens 1030 Volt in der Schwebé gehalten werden zu können.

Für die weitere Versuchsanordnung verweisen wir auf die Beschreibung bei Meyer u. Gerlach.<sup>1)</sup> Eine Vereinfachung der dort beschriebenen Anordnung wurde erzielt, indem dieselbe Bogenlampe das sichtbare Licht zur Beleuchtung und das ultraviolette Licht zur Abspaltung negativer Elektrizität aus den Teilchen lieferte. Sollte letzteres abgelenkt werden, so wurde ein Glasschirm in den Strahlengang der im übrigen ganz aus Quarz hergestellten Optik gebracht.

### § 2. Versuchsergebnisse.

Die Haltepotentiale der einzelnen Al-Teilchen bei verschiedenen Ladungen wurden auf die beiden angegebenen

1) l. c. p. 179 ff.

Weisen gemessen; doch geben wir vorher noch einige Meßreihen nach der von Ehrenhaft und Konstantinowsky angegriffenen Methode der Schwebespannungen ohne Empfindlichkeitsmessung wieder, weil Beobachtungen, bei denen sich die gleichen Potentialwerte so oft wiederholen, wobei die reziproken Werte derselben sich als Verhältnisse der *kleinsten* ganzen Zahlen darstellen lassen, noch nicht vorliegen.

### Fehlerabschätzung.

Das Teilchen befindet sich bei der Ladung  $n_i e$  und dem Potential  $V_i$  im Gleichgewicht, wenn

$$(1) \quad 300 d \frac{m g}{e} = n_i V_i = C$$

ist.<sup>1)</sup> Um aus den mit den Meßfehlern behafteten, statt  $V_i$  beobachteten, Haltepotentialen  $V'_i$  auf deren wahrscheinlichste Werte  $V_i^0$  und damit auf den wahrscheinlichsten Wert  $C^0$  der Konstante  $C$ , für welche die Messungen

$$(2) \quad n_i V'_i = C_i$$

vorliegen, schließen zu können, muß man die Größe der Versuchsfehler  $V'_i - V_i$  der verschiedenen Messungen zuerst untereinander abschätzen. Setzt man den am Millivoltmeter abgelesenen Wert

$$(3) \quad V'_i = V_i + \Delta V_i + \alpha,$$

wo  $\Delta V_i$  den Einstellfehler und

$$(4) \quad |\alpha| \leq 1 \text{ Volt}$$

den Ablesefehler bedeutet, so ist die auf das Teilchen wirkende, bewegende Kraft

$$(5) \quad P_i = \frac{n_i s \Delta V_i}{300 d} = \frac{v_i}{B},$$

wo  $v_i$  die Geschwindigkeit des Teilchens in mm/min und  $B$  die Beweglichkeit (Geschwindigkeit in denselben Einheiten unter der wirkenden Kraft  $P_i = 1$ ) bedeuten soll, und zwar ist  $P_i$  dann eine elektrische Kraft, wenn unter deren Einfluß das Teilchen steigt ( $v_i > 0$ ), wenn also  $\Delta V_i > 0$  ist, und

1) Bei diesem Ansätze wird nicht eine atomistische Struktur der Elektrizität schon vorausgesetzt, weil erst das Experiment zeigt, daß die  $n_i$  kleine ganze Zahlen sind.

dann die Schwerkraft, wenn unter deren Einfluß das Teilchen fällt ( $v_i < 0$ ), d. h. wenn  $\Delta V_i < 0$  ist. Werden nun die Haltepotentiale so genau bestimmt, daß etwa der vom Teilchen in 5 Minuten im Gesichtsfeld zurückgelegte Weg weniger als 0,05 Skalenteile beträgt (0,05 Skalenteile = 0,05 mm ist der kleinste noch deutlich ablesbare Wert der Verschiebung des Teilchens), so ist

$$\frac{n_i \cdot \Delta V_i \cdot 5}{300 \cdot d} \leq \frac{0,05}{B},$$

oder im ungünstigsten Fall

$$(6) \quad \Delta V_i = \frac{3d}{sB} \frac{1}{n_i} = \frac{c}{n_i},$$

wo  $c$  für alle Messungen an demselben Teilchen konstant bleibt. Also wird wegen  $|a| \leq 1$  Volt

$$(7) \quad |C| \leq n_i V_i + c + n_i = C + c + n_i.$$

Man sieht, daß die Messung von  $C$  immer ungenauer wird, je größer die Ladung des Teilchens ist. Daher sind in den folgenden Tabellen zur Berechnung des wahrscheinlichsten Wertes  $C^0$  der Konstanten  $C$  immer nur die zu den kleinsten Ladungen gehörenden Haltepotentiale (mit \* bezeichnet) herangezogen worden, und zwar wurde aus diesen das arithmetische Mittel genommen. Von  $C^0$  unterscheidet sich aber in unserem Falle wegen der Kleinheit der Zahlen  $n_i$  das arithmetische Mittel  $\hat{C}^0$  aller Zahlen  $C_i$  nur wenig.

Da nun die Konstante  $c$  durch die Methode der Schwebespannung nicht bestimmbar ist, so liefert dieselbe keine Möglichkeit der Fehlerabschätzung, wogegen sich Ehrenhaft und Konstantinowsky mit Recht wenden.

In den folgenden Tabb. I, II und III sind nun in der ersten Kolonne die Haltepotentiale  $V_i'$  in Volt in der beobachteten Reihenfolge, in der zweiten Kolonne die zugehörigen Zahlen  $n_i$ , in der dritten die Konstanten  $C_i$  und in der vierten die aus  $C^0$  sich ergebenden Werte für  $V_i^0$  eingetragen. In der fünften Kolonne endlich befinden sich die aus  $\hat{C}^0$  folgenden Werte

$$\hat{V}_i = \frac{\hat{C}^0}{n_i}$$

für die Haltepotentiale. Wir bemerken nochmals, daß sich natürlich solche Zahlen  $n_i$ , wenn man sie nur hinreichend

groß wählt, bei beliebig gegebenen Zahlen  $V'_i$  immer finden lassen. Darin aber, daß die  $n_i$  die kleinsten ganzen Zahlen sind, zeigt sich schon bei diesen Vorversuchen die atomistische Struktur der Elektrizität.

Tabelle I.

Nr. 41 Al.  $C^0 = 3052$ ,  $\dot{C}^0 = 3047$ .

$V'_i$	$n_i$	$C_i$	$V_i^0$	$\dot{V}_i$
435*	7	3045	436	435
338	9	3042	339	339
234	13	3042	235	234
217	14	3038	218	218
190 <sub>5</sub>	16	3048	191	190 <sub>5</sub>
179	17	3043	179 <sub>5</sub>	179
190 <sub>5</sub>	16	3048	191	190 <sub>5</sub>
203	15	3045	203 <sub>5</sub>	203
277	11	3047	277 <sub>5</sub>	277
304	10	3040	305	305
338	9	3042	339	339
762*	4	3048	763	762
611*	5	3055	610 <sub>5</sub>	609 <sub>5</sub>
509*	6	3054	509	508
382*	8	3056	381 <sub>5</sub>	381
338	9	3042	339	339
254	12	3048	254	254
234	13	3042	235	234
219	14	3064	218	218
161	19	3059	160 <sub>5</sub>	160

Tabelle II.

Nr. 44 Al.  $C^0 = 588$ ,  $\dot{C}^0 = 590$ .

$V'_i$	$n_i$	$C_i$	$V_i^0$	$\dot{V}_i$
196*	3	588	196	197
118	5	590	118	118
98 <sub>5</sub>	6	591	98	98
148	4	592	147	147 <sub>5</sub>
196*	3	588	196	196
148	4	592	147	147 <sub>5</sub>
196*	3	588	196	196
295*	2	590	294	295
196 <sub>5</sub> *	3	590	196	197
148	4	592	147	147 <sub>5</sub>
98 <sub>5</sub>	6	591	98	98
65	9	585	65	66
98	6	588	98	98
118	5	590	118	118
148	4	592	147	147 <sub>5</sub>
196 <sub>5</sub> *	3	590	196	197
118	5	590	118	118
148	4	592	147	147 <sub>5</sub>
584*	1	584	588	590

Tabelle III.

Nr. 45 Al.  $C^0 = 592$ ,  $\bar{C}^0 = 592$ .

$V'_i$	$n_i$	$C_i$	$V_i^0 = \bar{V}_i$
592 <sub>5</sub> *	1	592 <sub>5</sub>	592
296 <sub>5</sub> *	2	593	296
197 <sub>5</sub> *	3	591	197
148 <sub>5</sub>	4	594	148
118	5	590	118
98 <sub>5</sub>	6	591	99
74 <sub>5</sub>	8	592	74
49 <sub>5</sub>	12	594	49
66	9	594	66
148 <sub>5</sub>	4	594	148
118	5	590	118
98 <sub>5</sub>	6	591	99
85	7	595	85
74	8	592	74
118	5	590	118
197 <sub>5</sub> *	3	591	197
148 <sub>5</sub>	4	594	148

1. Bei denjenigen endgültigen Versuchen, denen die Ehrenhaftsche Einengungsmethode zugrunde lag, wurden statt des Haltepote ntials  $V'_i$  nacheinander zwei solche Spannungen  $V_i$  und  $\bar{V}_i$  an die Kondensatorplatten angelegt, daß das Teilchen das erstemal eine langsame Fall- und das zweitemal eine langsame Steigbewegung ausführte. Es war also

$$mg > \frac{s n_i V_i}{300 d} \text{ oder } n_i \underline{V}_i < n_i V_i = C$$

und

$$mg < \frac{s n_i \bar{V}_i}{300 d} \text{ oder } n_i \bar{V}_i > n_i V_i = C.$$

Die zu den Zahlenpaaren  $V_i$ ,  $\bar{V}_i$  gehörigen Zahlen  $n_i$  lassen sich, da es sich um kleine Zahlen handelt, leicht und in eindeutiger Weise durch Probieren finden. Über den Wert der unbekannten Konstanten  $C$  können wir aus den Ungleichungen

$$n_i \underline{V}_i < C < n_i \bar{V}_i$$

nur schließen, daß

$$\underline{C} < C < \bar{C}$$

ist, wenn mit  $C$  die größte der aus den Messungen sich ergebenden Zahlen  $n_i V_i$  und mit  $\bar{C}$  die kleinste der Zahlen  $n_i \bar{V}_i$  bezeichnet

wird. Wir nehmen daher als wahrscheinlichsten Wert  $C^0$  für  $C$  das arithmetische Mittel aus  $C$  und  $\bar{C}$

$$C^0 = \frac{C + \bar{C}}{2}.$$

Da die Potentiale  $V_i$  und  $\bar{V}_i$  nur auf  $\pm 1$  Volt genau ablesbar sind, so ist auch die Beziehung  $C < \bar{C}$  nur innerhalb der hierdurch bedingten Genauigkeitsgrenzen erfüllt. Falls also der seltene Fall eintritt, daß sich eines der Potentiale  $V_i$  oder  $\bar{V}_i$  um weniger als 1 Volt vom Haltepottential  $V_i$  unterscheidet und *gleichzeitig* der Ablesefehler  $V_i$  hinreichend vergrößert bzw.  $\bar{V}_i$  verkleinert, so kann — besonders wenn die zugehörige Zahl  $n_i$  groß ist — dadurch die Ungleichung  $C < \bar{C}$  in ihr Gegenteil  $C > \bar{C}$  verkehrt werden. Dann genügt aber eine Abänderung der betreffenden Potentiale  $V_i$  bzw.  $\bar{V}_i$  um *höchstens* 1 Volt, um auch diese Messungen mit den übrigen in Übereinstimmung zu bringen. Eine hierin liegende eventuelle Willkür findet aber ihre volle Rechtfertigung darin, daß die zu den fraglichen Potentialen  $V_i$  bzw.  $\bar{V}_i$  gehörenden Produkte  $n_i V_i$  bzw.  $n_i \bar{V}_i$  völlig aus der Reihe der anderen beobachteten Zahlen  $n_i V_i$  bzw.  $n_i \bar{V}_i$  herausfallen.

In den folgenden Tabb. IV, V und VI stehen in der ersten und zweiten Kolonne die Potentiale  $V_i$  und  $\bar{V}_i$ , in der dritten die zugehörige Zahl  $n_i$ , in der vierten und fünften die Zahlen  $n_i V_i$  und  $n_i \bar{V}_i$ , und in der sechsten Kolonne die aus  $C^0$  berechneten Potentialwerte  $V_i^0$ , die zwischen  $V_i$  und  $\bar{V}_i$  liegen müssen.

Tabelle IV.

Nr. 46 Al.  $C = 1820$ ,  $\bar{C} = 1824$ ,  $C^0 = 1822$ .

$V_i$	$\bar{V}_i$	$n_i$	$n_i V_i$	$n_i \bar{V}_i$	$V_i^0$
362	364	5	1810	1820 <sup>1)</sup>	364
303	306	6	1818	1836	304
228	230	8	1824 <sup>1)</sup>	1840	228
201	203	9	1809	1827	202 <sup>1)</sup>
228	232	8	1824 <sup>1)</sup>	1856	228

1) In Übereinstimmung mit dem Vorhergehenden genügt die Annahme  $\bar{V}_i = 365$  statt 364 bei  $n = 5$ , also  $n_i \bar{V}_i = 1825$  statt 1820 und  $\bar{V}_i = 227$  „ 228 „  $n = 8$ , „  $n_i V_i = 1816$  „ 1824 um  $C = 1820$ ,  $\bar{C} = 1824$ ,  $C^0 = 1822$  zu erhalten.

Tabelle IV (Fortsetzung).

$\underline{V_i}$	$\overline{V_i}$	$n_i$	$n_i \underline{V_i}$	$n_i \overline{V_i}$	$V_i^0$
302	304	6	1812	1824	304
909	912	2	1818	1824	911
603	608	3	1809	1824	607
453	456	4	1812	1824	455 <sub>5</sub>
360	365	5	1800	1825	364
302	306	6	1812	1836	304
259	263	7	1813	1841	260
201	203	9	1809	1827	202
181	183	10	1810	1830	182
201	203	9	1809	1827	202
258	263	7	1806	1841	260
450	459	4	1800	1836	455 <sub>5</sub>
910	913	2	1820	1826	911
300	313	6	1800	1878	304
258	263	7	1806	1841	260
	205	9		1845	202
258	262	7	1806	1834	260
358	366	5	1790	1830	364
450	457	4	1800	1828	455 <sub>5</sub>
605	610	3	1815	1830	607
906	918	2	1812	1836	911

Tabelle V.

Nr. 47 Al.  $\underline{C} = 944$ ,  $\overline{C} = 946$ ,  $C^0 = 945$ .

$\underline{V_i}$	$\overline{V_i}$	$n_i$	$n_i \underline{V_i}$	$n_i \overline{V_i}$	$V_i^0$
951 <sup>1)</sup>	960	1	951	960 <sup>2)</sup>	945
470	479	2	940	958	472 <sub>5</sub>
310	318	3	930	954	315
186	191	5	930	955	189
155	161	6	930	986	157 <sub>5</sub>
118	122	8	944	976	118
	193	5		965	189
156	169	6	936	954	157 <sub>5</sub>
188	192	5	940	960	189
311	318	3	933	954	315
943	948	1	943	948	945
470	480	2	940	960	472 <sub>5</sub>
308	318	3	924	954	315
185	195	5	925	975	189
134	138	7	938	966	135
930	955	1	930	955	945
465	484	2	930	968	472 <sub>5</sub>
235	248	4	940	992	236
	200	5		1000	189
153	160	6	918	960	157 <sub>5</sub>

1) Dieser Wert stimmt aus irgendwelchen Gründen (vielleicht Wärmebewegung) nicht mit den folgenden überein und wurde bei Bestimmung von  $C = 944$  nicht berücksichtigt.

Tabelle V (Fortsetzung).

$V_i$	$\bar{V}_i$	$n_i$	$n_i \bar{V}_i$	$n_i \bar{V}_i$	$V_i^*$
113	120	8	904	960	118
155	160	6	930	960	157 <sub>5</sub>
185	195	5	925	975	189
232	243	4	928	972	236
308	320	3	924	960	315
464	480	2	928	960	472 <sub>5</sub>
229	240	4	916	960	236
465	473	2	930	946	472 <sub>5</sub>
310	321	3	930	963	315
228	241	4	912	964	236
152	161	6	912	966	157 <sub>5</sub>
118	122	8	944	976	118
310	320	3	930	960	315
465	481	2	930	962	472 <sub>5</sub>
936	953	1	936	953	945
465	480	2	930	960	472 <sub>5</sub>
310	322	3	930	966	315
930	955	1	930	955	945
185	198	5	925	990	189

Tabelle VI.

Nr. 59 Al.  $C = 1950$ ,  $\bar{C} = 1964$ ,  $C^* = 1957$ .

$V_i$	$\bar{V}_i$	$n_i$	$n_i \bar{V}_i$	$n_i \bar{V}_i$	$V_i^*$
650	655	3	1950	1965	652
377	395	5	1885	1975	301
275	284	7	1925	1988	279
385	395	5	1925	1975	301
478	495	4	1912	1980	489
650	655	3	1950	1965	652
972	982	2	1944	1964	978 <sub>5</sub>
641	655	3	1923	1965	652
485	497	4	1940	1988	489
389	395	5	1945	1975	301
275	281	7	1925	1967	279 <sub>5</sub>
322	330	6	1932	1980	326
978 <sub>5</sub> <sup>1)</sup>	978 <sub>5</sub> <sup>1)</sup>	2			978 <sub>5</sub>
641	656	3	1923	1968	652
485	509	4	1940	2036	489
378	395	5	1890	1975	301
272	281	7	1904	1967	279
320	330	6	1920	1980	326
480	499	4	1920	1996	489
645	672	3	1935	2016	652
942	990	2	1884	1980	978 <sub>5</sub>
645	665	3	1935	1995	652
275	285	7	1925	1995	279
77	79	25	1925	1975	78

1) Haltepotential, Teilchen war während 30 Minuten in Ruhe.

Man bemerke, daß das während dieser Einengungsmeßreihe beobachtete Haltepotential von 978<sub>5</sub> Volt, auf das sich die Anmerkung der Tab. VI bezieht und das durch eine halbstündige Beobachtungsdauer besonders genau bestimmt ist, auch übereinstimmt mit dem aus der Einengungsmethode dafür errechneten Wert. Wir schließen daraus, daß die anfechtbare Methode der Haltepotentiale, wenn sie nur hinreichend sorgfältig durchgeführt wird, zu denselben Resultaten führt wie die Einengungsmethode.

2. Nun wurde noch eine zweite Art der Messung der Haltepotentiale vorgenommen, welche die Empfindlichkeit der Einstellung, d. h. die Größe des maximalen Fehlers bei der Einstellung jedes Haltepotentials, abzuschätzen gestattete. Dazu wurde zuerst das Haltepotential  $V_i'$  so genau eingestellt, daß sich das Teilchen während 3 Minuten im Gesichtsfelde nicht merklich (d. h. weniger als 0,05 Skalenteile) bewegte. Hierauf wurde das etwas geänderte Potential  $V_i' + \Delta V_i^*$  an die Platten angelegt, unter dessen Einfluß sich das Teilchen in 3 Minuten in vertikaler Richtung im Gesichtsfelde um eine Strecke bewegte, die auf 0,  $\alpha_i$  Skalenteile geschätzt wurde. Unter der alleinigen Annahme der Proportionalität von Kraft und Geschwindigkeit läßt sich dann eine obere Grenze für den Einstellfehler  $\Delta V_i$  angeben.

In der Tat wirkt auf das Teilchen im ersten Falle, in dem als Haltepotential

$$V_i' = V_i + \Delta V_i + \alpha$$

am Millivoltmeter abgelesen wird, infolge des Einstellfehlers eine Kraft proportional zu  $\Delta V_i$ , unter deren Einfluß das Teilchen einen Weg von 0,  $\beta$  Skalenteilen zurücklegt, wo  $|\beta| < \frac{1}{2}$  ist, da für  $\beta = \frac{1}{2}$  die Bewegung des Teilchens eben sichtbar wäre. Im zweiten Fall wird am Millivoltmeter

$$V_i' + \Delta V_i^* = V_i + \Delta V_i^* + \Delta V_i + \alpha$$

abgelesen; die bewegende Kraft ist diesmal proportional zu  $\Delta V_i^* + \Delta V_i$  und der zurückgelegte Weg, der nur bis auf 0,1 Skalenteile genau ablesbar ist, beträgt 0,  $\gamma_i + 0, \gamma_i$  Skalenteile, wo  $|\gamma| < 1$  ist.

Also wird

$$\frac{\Delta V_i}{\Delta V_i^* + \Delta V_i} = \frac{0, \beta}{0, x_i + 0, \gamma}$$

oder

$$\Delta V_i = \frac{0, \beta}{0, x_i + 0, \gamma - 0, \beta} \Delta V_i^*.$$

Wegen  $|\beta| < \frac{1}{2}$  und  $|\gamma| < 1$  wird also der *maximale* Fehler

$$|\Delta V_i| < \frac{1}{|2x_i| - 3} |\Delta V_i^*|.$$

Nun lässt sich  $\Delta V_i^*$  als Differenz zweier Ablesungen am Millivoltmeter nur bis auf 2 Volt genau abschätzen. Bezeichnen wir also jetzt mit  $\Delta V_i^*$  nicht die *wirkliche* Differenz der beiden Potentiale, sondern die *abgelesene*, so haben wir

$$|\Delta V_i| < \frac{|\Delta V_i^*| + 2}{|2x_i| - 3}$$

und wir erhalten wegen  $|\alpha| \leq 1$  in

$$V_i' = V_i + \Delta V_i + \alpha$$

für den maximalen Versuchsfehler

$$(8) \quad |\Delta V_i| + |\alpha| < \frac{|\Delta V_i^*| + 2}{|2x_i| - 3} + 1 = f_i.$$

Hat man den maximalen Fehler  $f_1$  bei der Ladung  $e_1$  ermittelt, so berechnet sich daraus der Fehler  $f_2$  bei der Ladung  $e_2 = n e_1$  des Teilchens zu

$$(9) \quad f_2 = \frac{|\Delta V_1^*| + 2}{(|2x_1| - 2)n - 1} + 1,$$

weil bei der nämlichen Potentialänderung  $\Delta V_2^* = \Delta V_1^*$  auf das Teilchen nun die Kraft  $n \Delta V_1^* + \Delta V_2$  wirkt und dasselbe daher den Weg  $\frac{1}{10} \cdot n (x_1 + \gamma)$  Skalenteile zurücklegt.

Um für die Beweglichkeit des Teilchens und damit für den Einstellfehler eine Reihe von Messungen zu erhalten, wurde derselbe nicht aus (9) berechnet, sondern für die meisten Haltepotentiale aufs neue experimentell bestimmt. Man erhält dadurch nämlich ein experimentelles Kriterium dafür, ob während der ganzen Dauer der Beobachtungen an einem Teilchen im Kondensator keine durch Temperaturunterschiede verursachte Luftströmungen vorhanden waren. In der Tat, besitzt das Teilchen eine Ladung von  $m$  Elementarquanten

und legt es bei einer Potentialänderung  $\Delta V_m^* \pm 2$  Volt den Weg  $\frac{1}{10} (x_m \pm \frac{3}{2})$  Skalenteile in einer gewissen Zeit zurück, ist also  $m(\Delta V_m^* \pm 2) = C(2x_m \pm 3)$ ,

wo  $C$  ( $1/C$  proportional der Beweglichkeit) eine für ein Teilchen charakteristische Konstante ist, so wird

$$m \frac{\Delta V_m^* - 2}{2x_m + 3} \leqq C \leqq m \frac{\Delta V_m^* + 2}{2x_m - 3}.$$

Es muß also innerhalb einer Meßreihe jede der Zahlen

$$A_m = m \frac{\Delta V_m^* - 2}{2x_m + 3}$$

kleiner sein als jede der Zahlen

$$B_m = m \frac{\Delta V_m^* + 2}{2x_m - 3}$$

und das Erfülltsein dieser Ungleichungen beweist, daß die Beweglichkeit richtig bestimmt wurde, bzw. daß keine störenden Luftströmungen vorhanden waren.

Berechnet man ferner die zu den Haltepotentialen  $V_i'$  gehörigen Konstanten  $C_i = n_i V_i'$  und die in dieselben eingehenden Versuchsfehler  $n_i f_i$ , so müssen auch die einzelnen Werte  $C_i$  innerhalb dieser Fehler übereinstimmen. Aus der Größe der Fehler  $n_i f_i$  kann man noch ersehen, mit welchem Gewichte die einzelnen Messungen  $C_i$  für  $C$  zu bewerten sind, um daraus den wahrscheinlichsten Wert  $C^0$  zu finden. Man sieht aus (7), daß diese Messungen mit wachsendem  $n_i$  immer ungenauer werden.

In den folgenden Tabb. VII, VIII und IX steht in der ersten Kolonne das beobachtete Haltepotential  $V_i'$ , in der zweiten  $\Delta V_i^*$ , in der dritten  $x_i$ , in der vierten der größtmögliche Versuchsfehler  $f_i$ , in der fünften die zu  $V_i'$  gehörige ganze Zahl  $n_i$ , in der sechsten die hieraus berechnete Konstante  $C_i = n_i V_i'$  samt dem in dieselbe eingehenden Versuchsfehler  $n_i f_i$ , und in der siebenten und achten Kolonne die Zahlen  $A_m$  und  $B_m$ . Da die Messungen — infolge der Kleinheit der Zahlen  $n_i$  — noch keine systematische Zunahme der Versuchsfehler mit wachsendem  $n_i$  erkennen lassen, so wurde als Konstante  $C^0$  das arithmetische Mittel aller  $C_i$  genommen. In der neunten Kolonne endlich steht der hieraus berechnete Wert  $V_i^0$ , der innerhalb der Fehlergrenzen mit  $V_i'$  übereinstimmen muß.

Tabelle VII.

Nr. 68 Al.  $C^0 = 2826$ .

$V'_i$	$\Delta V'_i$	$x_i$	$f_i$	$n_i$	$C_i$	$A_m$	$B_m$	$V_i^0$
705	4	2	7	4	$2820 \pm 28$	2,3	48	706 <sub>5</sub>
566	2	2	5	5	$2830 \pm 25$	0	40	565
942	4	2	7	3	$2826 \pm 21$	1,7	36	942
471	5	2	8	6	$2826 \pm 48$	5,1	84	471
404	4	2	7	7	$2828 \pm 49$	4,0	84	404
314	4	2	7	9	$2826 \pm 63$	5,1	108	314
353	3	6	2	8	$2824 \pm 16$	1,7	8,9	353
283	3	4	2	10	$2830 \pm 20$	1,8	20	283

Tabelle VIII.

Nr. 73 Al.  $C^0 = 926$ .

$V'_i$	$\Delta V'_i$	$x_i$	$f_i$	$n_i$	$C_i$	$A_m$	$B_m$	$V_i^0$
922 <sup>1)</sup>	13	5	3	1	$922 \pm 3$	0,8	2,1	926
465	3	1	—	2	930 —	0,2	—	463
310	3	6	2	3	$930 \pm 6$	0,2	1,6	308
231	1	1	—	4	924 —	—	—	231 <sub>5</sub>
185	3	2	6	5	$925 \pm 30$	0,7	25	185
154	2	4	2	6	$924 \pm 12$	—	4,8	154
133	1	1	—	7	931 —	—	—	132
116	2	2	5	8	$928 \pm 40$	0	32	116
103	2	5	2	9	$927 \pm 18$	0	5,1	103
92	1	2	4	10	$920 \pm 40$	—	30	92

1) Dieser Wert stimmt innerhalb der Fehlergrenze nicht mit  $V_1^0$  überein.

Tabelle IX.

Nr. 74 Al.  $C^0 = 921$ .

$V'_i$	$\Delta V'_i$	$x_i$	$f_i$	$n_i$	$C_i$	$A_m$	$B_m$	$V_i^0$
925	5	1	—	1	925 —	0,6	—	921
309	2	2	5	3	$927 \pm 15$	0	12	307
459	3	1	—	2	918 —	0,4	—	460 <sub>5</sub>
230	2	2	5	4	$920 \pm 20$	0	16	230
183	1	2	4	5	$915 \pm 20$	—	15	184
153	2	2	5	6	$918 \pm 30$	0	24	153 <sub>5</sub>
115	3	6	2	8	$920 \pm 16$	0,5	4,4	115
131	1	2	4	7	$917 \pm 28$	—	21	132
103	3	5	2	9	$927 \pm 18$	0,7	6,4	102
92	2	6	1	10	$920 \pm 10$	0	4,4	92

Haltepotential in Volt

Nr. 76 Mg.

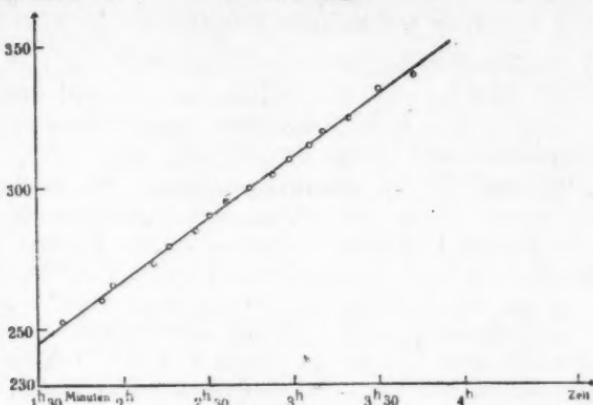


Fig. 3.

## § 3. Absolute Ladungsmessungen.

## Verhalten von Magnesium.

An einigen Teilchen wurden absolute Ladungsmessungen vorgenommen, und zwar, indem unter Anwendung der unkorrigierten Stokeschen Formel

$$(10) \quad mg = \frac{4}{3} \pi a^3 \sigma g = 6 \pi \mu a v,$$

wo  $\sigma$  das spezifische Gewicht und  $\mu$  den Koeffizienten der inneren Reibung der Luft<sup>1)</sup> bedeutet, aus der Fallgeschwindigkeit  $v$  des Teilchens — unter der Voraussetzung, daß dasselbe Kugelgestalt habe und das spezifische Gewicht 2,6 (Al) besitze — auf dessen Masse  $m$  und dann aus

$$(11) \quad mg = \frac{\epsilon}{300 d} n V$$

auf die Elementarladung  $\epsilon$  geschlossen wurde. Diese Messungen wurden natürlich nicht angestellt, um die Größe des Elementarquantums  $\epsilon$  zu ermitteln, sondern es sollten umgekehrt die Abweichungen der Meßergebnisse von dem Wert

1)  $\mu = 1812 \cdot 10^{-7}$  für Luft von  $20,2^\circ$  C nach L. Gilchrist, Physik. Zeitschr. 14. p. 160. 1913.

$\epsilon = 4,8 \cdot 10^{-10}$  elektrostat. Einh. darüber Aufschluß geben, wie weit die sicher vorhandenen Fehlerquellen:

1. die Teilchen besitzen keine Kugelgestalt,
2. die Teilchen bestehen mindestens teilweise aus Al-Oxyden und haben daher nicht die der Rechnung zugrundegelegte Dichte des Al (2,6),

einen Einfluß auf das Resultat ausüben. Die Messungen wurden in der Weise ausgeführt, daß zuerst durch hinreichend häufige Umladungen das konstante Produkt  $n_i V_i$  der Zahl der auf einem Teilchen sitzenden positiven Elementarladungen in das zugehörige Haltepotential ermittelt und sodann die Fallgeschwindigkeit  $v$  unter der Wirkung des Erdgeschwerefeldes bestimmt wurde, indem man das Teilchen ca. 20 mal zwischen zwei um 1 mm entfernten Marken fallen ließ. Die Zeitregistrierung erfolgte mit einem Chronographen von Favarger & Cie. in Neuchâtel. Wir geben als Beispiel folgende Messung wieder:

Nr. 100 Al.  $C^0 = 3085$ .

$\overline{V}_i$	$\overline{V}_i$	$n_i$	$n_i \overline{V}_i$	$n_i \overline{V}_i$	$V_i^0$
751	767	4	3004	3068	759
601	616	5	3005	3080	607
500	510	6	3000	3060	508
430	440	7	3010	3080	434
371	383	8	2968	3064	379
150	153	20	3000	3060	152

Als mittlere Fallgeschwindigkeit ergab sich aus 21 Messungen

$$v = \frac{1}{51,7} \text{ cm sec}^{-1}.$$

Hieraus berechnet sich wegen (7) und (8)

$$\begin{aligned} \epsilon &= \frac{18 \pi}{\sqrt{2 \sigma g}} \frac{300 d}{n V} (\mu v)^{1/2} \\ &= 5,8 \cdot 10^{-4} \frac{v^{1/2}}{n V} = 5,1 \cdot 10^{-10} \text{ elektrostat. Einh.} \end{aligned}$$

Wenn man annimmt, daß die Teilchen mindestens an der Oberfläche aus Aluminiumoxyd ( $\text{Al}_2\text{O}_3$ ) mit der Dichte  $\sigma = 3,8$  bestehen, so würde man für  $\epsilon$  kleinere Werte erhalten,

ebenso bei Anwendung der von den anderen Autoren gebrauchten Widerstandsgesetze.<sup>1)</sup>

Die weiteren Messungen an anderen Teilchen ergaben Werte für das Elementarquantum, die zwischen  $2,9 \cdot 10^{-10}$  und  $6,6 \cdot 10^{-10}$  elektrostat. Einh. lagen.

Um uns zum Schluß noch ein Bild von der ungefähren Größe der verwendeten Al-Teilchen zu machen, berechnen wir den Teilchenradius  $a$  aus

$$\frac{4}{3} \pi a^3 \sigma g = \frac{\epsilon}{300 d} n V,$$

worin wir für  $\epsilon$  den Wert des Elementarquantums  $4,8 \cdot 10^{-10}$  elektrostat. Einh. einsetzen. Wir erhalten für  $n V \geq 500$ , was für unsere sämtlichen Teilchen zutrifft,

$$a \geq 9 \cdot 10^{-5} \text{ cm.}$$

#### Beobachtungen an Magnesium.

An Magnesiumteilchen angestellte Beobachtungen zeigten folgende Erscheinungen:

1. Die Partikeln wurden während der Beobachtungsdauer fortgesetzt schwerer, was vielleicht von andauernder Oxydation ihrer Oberfläche herrührte.

2. Die Verzögerungszeit, d. h. die zur Abspaltung eines Elektrons aus dem Teilchen nötige Dauer der Bestrahlung mit ultraviolettem Lichte wurde immer größer, bis die Teilchen etwa eine Stunde nach ihrer Erzeugung vollkommen lichtelektrisch unempfindlich waren. Da die Aufladung der Teilchen nur ca. 10 Elementarquanten erreichte, kann die beobachtete Verzögerungszeit sicher nicht davon herrühren, daß die Teilchen ihre Maximalladung hatten. Die Mg-Partikeln waren daher zur Beobachtung des lichtelektrischen Effektes ungeeignet.

Da die Schwebespannungsanordnung zugleich eine äußerst empfindliche Wage darstellt, mit der man die Gewichtsänderung der aufgehängten Teilchen aufs genaueste verfolgen kann, geben wir als Beispiel für das Teilchen Nr. 76 Mg die Kurve wieder (Fig. 3, p. 179), welche das Gewicht der Partikel

1) Vgl. die Zusammenstellung bei E. Meyer u. W. Gerlach. Elster-Geitel-Festschrift p. 200.

in Abhängigkeit von der Zeit nach der Erzeugung darstellt. Man sieht, daß die Gewichtszunahme während der ganzen zweistündigen Beobachtungszeit in derselben Stärke anhält.

*Zusammenfassung.*

*Die reziproken Haltepotentiale oder Ladungen von mikroskopischen Al-Teilchen verhalten sich innerhalb der experimentell bestimmten Versuchsfehler wie ganze Vielfache einer Grundladung. Für hinreichend kleine Partikeln sind diese Multipla die kleinsten ganzen Zahlen.*

Ich erlaube mir, auch an dieser Stelle Hrn. Prof. Dr. E. Meyer für die Anregung zu dieser Arbeit, sowie für das fördernde Interesse, das er derselben immer entgegenbrachte, meinen herzlichsten Dank auszusprechen.

Zürich, den 14. Mai 1918.

Physikal. Institut der Universität.

(Eingegangen 18. Mai 1918.)

---

**2. Über einige Grundbegriffe  
in der Optik dispergierender Medien;  
von Ragnar Lundblad.**

Die Größen, auf deren Berechnung wir im folgenden eingehen wollen, sind die nachstehenden:

1. Die erregende elektrische Kraft  $\mathfrak{E}$ ;
2. die Maxwellschen Vektoren  $\mathfrak{E}$ ,  $\mathfrak{D}$  und  $\mathfrak{H}$ ;
3. die elektromagnetische Feldenergie:

$$U = \frac{\mathfrak{E} \mathfrak{D}}{8\pi}; \quad T = \frac{\mathfrak{H}^2}{8\pi}.$$

In allen Überlegungen beschränken wir uns auf *isotrope, nichtkristallinische Medien*.

**§ 1. Aufstellen des Problems.**

Unsere erste Aufgabe wird die sein, die Vektoren  $\mathfrak{E}$ ,  $\mathfrak{D}$  und  $\mathfrak{H}$  aus atomistischen Vorstellungen aufzubauen. Das Problem ist also eines der klassischen in der Elektronentheorie. Wir wollen aber versuchen, die atomistische Anschauung noch in einem Punkte beizubehalten, wo die übliche Darstellungsart sie in den Hintergrund treten läßt.

In formeller Hinsicht knüpfen wir an eine Gruppe Abhandlungen von Esmarch<sup>1)</sup>, Oseen<sup>2)</sup>, Ewald<sup>3)</sup> u. a. an. Diese Arbeiten haben unsere Kenntnisse betreffend die Ausbreitung von elektromagnetischen Wellen in dispergierenden Medien beträchtlich vertieft und gefördert, und zwar in dem Sinne, daß wir jetzt die erregende elektrische Kraft als die Resultierende von Erregungen auffassen, die von sämtlichen Molekülen des durchstrahlten Mediums herkommen, während die äußere, einfallende Welle durch einen anderen Teil der erregten Strahlung kompensiert erscheint.

1) W. Esmarch, Ann. d. Phys. **42**, p. 1257. 1913.

2) C. W. Oseen, Ann. d. Phys. **48**, p. 1. 1915.

3) P. P. Ewald, Ann. d. Phys. **49**, p. 1 u. 117. 1916.

Den genannten Theorien gemeinsam ist die Annahme, daß die Maxwellischen Gleichungen für das Vakuum in den intermolekularen Zwischenräumen gültig sind. Diese Voraussetzung findet man bekanntlich auch in den Dispersionstheorien von Lorentz und Planck. In jenen wie in diesen wird die elektrische und die magnetische Feldstärke mittels der Ansätze

$$(1) \quad \mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0 + \sum \text{rot rot} \frac{p \left( t - \frac{r}{c} \right)}{r};$$

$$(2) \quad \mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0 + \sum \frac{1}{c} \text{rot} \frac{p \left( t - \frac{r}{c} \right)}{r};$$

in die Rechnung getragen, oder wenigstens mittels Ausdrücken, die von diesen nur formal verschieden sind. Hier sind:

$\mathfrak{E}$  = die örtliche elektrische Feldstärke;

$\mathfrak{H}$  = die örtliche magnetische Feldstärke;

$\mathfrak{E}_0$  = die elektrische Feldstärke der einfallenden Welle;

$\mathfrak{H}_0$  = die magnetische Feldstärke der einfallenden Welle;

$p$  = das Moment des Einzelmoleküls;

$r$  = der Abstand vom Aufpunkte nach dem nämlichen Molekül;

$c$  = die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum.

Die rot sind an jenem Orte zu vollführen, wo wir die Feldstärke berechnen wollen; die Summation ist über alle Moleküle zu erstrecken.

*Die erregende elektrische Kraft*  $\mathfrak{E}'$  ist diejenige Kraft, die ein Molekül zum Schwingen anregt. Sie wird erhalten, wenn man die soeben betrachtete Moleköl bei der Summation unterdrückt.

Nach Lorentz ist (in unsere Einheiten übertragen)

$$(3) \quad \mathfrak{E}' = \mathfrak{E}' - \frac{4\pi}{3} \mathfrak{P},$$

wo  $\mathfrak{P}$  die auf die Volumeneinheit bezogene Polarisation bezeichnet. Um das Zusatzglied

$$- \frac{4\pi}{3} \mathfrak{P}$$

zu finden, verfährt man meistens<sup>1)</sup> in der Weise, daß man um das Moleköl ein Kugelchen legt, das gegen die Wellen-

1) Man vgl. z. B. H. A. Lorentz, The Theory of Electrons. p. 138. Leipzig, B. G. Teubner, 1916.

länge klein ist, aber trotzdem so groß, daß sich drinnen viele Moleküle finden. Für isotrope Körper heben sich dann die Wirkungen der Nachbarmoleküle auf. Die Einwirkungen der äußeren Moleküle lassen sich wiederum so berechnen, wie man die elektrische Kraft in einer sphärischen Höhlung im elektrostatisch polarisierten Dielektrikum vorfindet. Bei dieser Berechnung kommt das Polarisationsglied zum Vorschein; es möchte sonach aus der Umgebung des Moleküls stammen.

In den genaueren Ausführungen von Lorentz<sup>1)</sup> erscheint das Polarisationsglied in etwas anderer Weise, indem es bei der Berechnung des Einflusses der Moleküle innerhalb der Kugel hervorgeht. An diesem Punkte seiner Analyse hat er aber schon die atomistischen Vorstellungen durch Mitteilung verlassen, und das Glied erscheint zunächst als ein Flächenintegral. Die physikalische Deutung dieses Integrals würde wohl die einer Flächenbelegung sein, die an der halben Kugel positiv und an der anderen Hälfte negativ ist, und die dadurch zustande kommt, daß einige Moleküle im polarisierten Zustande mit ihrem einen Pol die Kugelfläche durchqueren.

Planck<sup>2)</sup>, der auch zu der Gleichung (3) gelangt, lenkt dagegen seine Auseinandersetzungen so, daß er zuerst die Einwirkungen aller übrigen Resonatoren auf den soeben betrachteten summiert und der erregenden Kraft gleichsetzt, dann durch ein mathematisch klares, physikalisch aber weniger durchsichtiges Verfahren Beziehungen zwischen den erregenden elektrischen und magnetischen Kräften herleitet. Diese Gleichungen werden den Maxwellschen durchaus ähnlich, wenn man schreibt:

$$\mathfrak{E}' - \frac{4\pi}{3} \mathfrak{P} = \mathfrak{E},$$

$$\mathfrak{E}' + \frac{8\pi}{3} \mathfrak{P} = \mathfrak{D},$$

$$\mathfrak{H}' = \mathfrak{H}.$$

Über die physikalische Bedeutung der neuen Vektoren  $\mathfrak{E}$ ,  $\mathfrak{D}$  und  $\mathfrak{H}$  wie auch der Glieder mit  $\mathfrak{P}$  macht Planck keinerlei Aussage. Er schreibt nur<sup>3)</sup>: „Jetzt besitzen die Gleichungen des elektromagnetischen Feldes dieselbe Form wie für ein

1) H. A. Lorentz, Enzykl. d. math. Wiss. Bd. V, 2. p. 211 u. ff.

2) M. Planck, Berl. Ber. 1902. p. 470.

3) M. Planck, l. c. p. 484.

homogenes Medium. Wir nennen daher  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{H}$  die elektrische und die magnetische Kraft des Feldes (Feldintensität) und  $\mathfrak{D}$  die elektrische Induktion.“

Implizite sagen jedoch die Planckschen Überlegungen etwas über den Ursprung der bezüglichen Terme aus. Sollen nämlich  $\mathfrak{E}$ ,  $\mathfrak{D}$  und  $\mathfrak{H}$  das gleiche bedeuten wie in den Maxwell'schen Gleichungen, so muß z. B.  $\mathfrak{E}$  den Mittelwert der elektrischen Kraft in physikalisch kleinen Bereichen bedeuten. Wie man nachweisen kann, stellt aber andererseits ein Vektor, den man so wie das  $\mathfrak{E}$  bei Planck berechnet, erst dann die mittlere Kraft im physikalisch kleinen Bereiche dar, wenn man aus der Mitteilung ein Kugelchen mit immer kleinerem Radius um das Molekül ausschließt. Aber dann kann das Glied

$$-\frac{4\pi}{3} \mathfrak{P}$$

nur auf den Feldern innerhalb des Moleküls beruhen.

Es entsteht nun die Frage, ob sein Betrag wirklich aus den üblichen elektrischen Gesetzen erfolgt, wenn man sie auf das Atominnere bezieht. Heutzutage, wo so kühne und verschiedenartige Annahmen über die Eigenschaften des Atominneren landläufig sind, wäre es vielleicht nicht unwichtig, sich die Tragweite der klassischen Elektrizitätslehre in dieser Hinsicht klar zu machen.

Ehe wir uns an die Lösung des Problems machen, wollen wir indessen den Übergang zum Esmarchschen Gedankenkreis vollziehen. Da die von Oseen gelieferte Darstellung des Gegenstandes mir als die weitaus klarste und dienlichste vorkommt, werde ich dabei seine Methode befolgen.

### § 2. Die Vektoren $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ als Funktion von $\mathfrak{P}$ .

Behufs einer genaueren Definition des Vektors  $\mathfrak{P}$  legen wir um den Punkt, wo der Wert von  $\mathfrak{P}$  zu bestimmen ist, ein Kugelchen, das gegen die Wellenlänge klein ist. Sein Volumen sei  $V$ . Die Moleküle im Kugelinneren seien polarisiert, und zwar mit dem Einzelmomente  $\mathfrak{p}$ . Dann setzen wir als Definition

$$\mathfrak{P} = \frac{\Sigma \mathfrak{p}}{V},$$

wo der Zähler natürlich die Vektorsumme der Momente ist.

Wir nehmen nun an, daß die Moleküle so dicht gelagert sind, daß die streng genommen unstetige Funktion  $\mathfrak{P}$  durch

eine stetige Funktion ersetzt werden darf, die wir obendrein stetig differenzierbar voraussetzen. Dann können wir in (1) und (2) die Summationen über die Moleküle  $M$  mit den Momenten  $p$  durch eine Integration über alle Volumenelemente  $d\tau$  mit den Momenten  $\mathfrak{P} d\tau$  ersetzen. Für Volumenelemente des Körpers, deren Abstände vom Punkte, wo wir das Feld ermitteln wollen, gegen die intermolekularen Entferungen groß sind, ist dieses Vorgehen offenbar statthaft. Wäre unsere Aufgabe die, das augenblickliche Feld an irgendeinem Orte aufzufinden, würde es dagegen allerdings unerlaubt sein, das Verfahren auch auf die nächste Nähe des Aufpunktes auszudehnen. Denn einzelne benachbarte Moleküle können sehr starke, für uns gänzlich unkontrollierbare Felder erzeugen. Wenn wir jetzt, trotzdem, Integration statt Summation durchweg benutzen, so geht dies darauf zurück, daß wir nicht die erregenden Felder in ihrem statistischen Wechsel aufzufinden beabsichtigen, sondern nur nach denjenigen Mittelwerten fragen, die für den geordneten Vorgang der Lichtausbreitung maßgebend sind. Freilich bedarf das Verfahren in diesem Teile einiger Worte zur Begründung.

Wir legen um das Molekül, welches wir für den Augenblick betrachten, zwei Kugelflächen mit den Radien  $r_0$  und  $r_1$ . Die innere Kugelfläche  $r_0$  umschließe das Molekül so eng, daß sie nie von einem Fremdmolekül oder, präziser ausgedrückt, von dessen Mittelpunkte geschnitten wird. Wenn es sich um ein Gas handelt, wird  $r_0$  mit der Größe zusammenfallen, die wir aus der kinetischen Gastheorie als „Molekül-durchmesser“ kennen. Den Radius  $r_1$  der äußeren Kugelfläche wählen wir klein gegen die Wellenlänge, aber doch möglichst groß, damit der Kugelraum möglichst viele Moleküle enthalten soll. Den Raum  $\Omega$  zwischen den beiden Kugelflächen zerlegen wir in die Volumenelemente  $d\omega_1, \dots, d\omega_N$ , die beliebig klein gewählt werden können und so klein gemacht werden müssen, daß sich nie die Mittelpunkte zweier Moleküle in dem gleichen Volumenelemente zusammen befinden und daß es für das augenblickliche erregende Feld des im Zentrum befindlichen Moleküls belanglos ist, ob man eines der Nachbarmoleküle in irgendeiner Richtung verschiebt, nur daß sein Mittelpunkt immer in dem gleichen Volumenelemente bleibt.

Betrachten wir anfangs ein Gas, und zwar zu einer Zeit, wo z. B. die Elemente  $d\omega_{i_1}, d\omega_{i_2} \dots d\omega_{i_n}$  von Molekülen besetzt sind. Diese Moleküle führen Schwingungen aus, die zum Teil durch Erregungen, die von den Elektronen außerhalb der Kugelfläche  $r_1$  herrühren, zum Teil durch Wechselwirkungen mit den übrigen  $n$  Molekülen innerhalb jener Fläche verursacht sind. Das gesamte erregende Feld im Kugelmittelpunkte sei  $\mathcal{E}(i_1 \dots i_n)$ . Unter dem Einflusse dieses Feldes schwingt nun das Molekül, und wir wollen für einen Augenblick annehmen, daß es möglich sei, an einem Orte, der dem Molekül um sehr viele Wellenlängen entfernt ist, das von unserem Molekül herkommende Feld gesondert zu beobachten. Dieses Feld kennzeichnen wir zum Betrage wie gewöhnlich durch die Amplitude, zum Zeichen durch das Zeichen der Phase bei einer beliebig gewählten Zeit  $t_0$ , und wir bezeichnen es mit  $e(i_1 \dots i_n)$ . Die Häufigkeit jener Schwingungsbewegung ist proportional der Wahrscheinlichkeit  $W(i_1 \dots i_n)$  der angenommenen Molekülkonfiguration. Wenn wir eine hinreichend lange Zeit hindurch beobachten und den Mittelwert aller beobachteten Felder berechnen, mit Rücksicht auf ihre Wahrscheinlichkeit genommen, bekommen wir mithin eine gewisse Größe

$$\bar{U} = \sum W(i_1 \dots i_n) \cdot e(i_1 \dots i_n),$$

wo die Summe über alle möglichen Molekülkonfigurationen zu erstrecken ist.

Betrachten wir nun zweitens einen Fall, der dem wirklich realisierbaren näher kommt, nämlich daß wir die zusammengelegte Wirkung aller  $n + 1$  Moleküle in der Kugel  $r_1$  beobachten. Diese Kugel war gegen die Wellenlänge klein vorausgesetzt, und wir beobachten an einem entfernten Orte. Ein jedes der  $n + 1$  Moleküle wird darum bei uns sehr nahe das gleiche Feld erzeugen, wie wenn es in dem Mittelpunkte läge. Zu jedem Augenblicke beobachten wir jetzt eine mittlere Amplitude, und diese weicht offenbar von der soeben definierten Größe  $\bar{U}$  um so weniger ab, je mehr Moleküle der Beobachtung unterzogen werden.

Das nämliche Feld würden wir ebenfalls beobachten, wenn anstatt der schwingenden Einzelmomente  $p_1 \dots p_{n+1}$  das resultierende Moment

$$\sum_1^{n+1} p_i$$

im Kugelmittelpunkte schwänge, oder wenn jedes Molekül an seinem Orte mit dem Momente

$$\frac{\sum_1^{n+1} p_i}{n+1}$$

schwänge. Das Moment aber ist mit der jeweiligen erregenden Kraft durch eine lineare Differentialgleichung verbunden. Wenn das Moment  $p_i$  von der erregenden Kraft  $E'_i$  erzeugt wird, muß deswegen auch das Moment

$$\sum_1^{n+1} p_i$$

von der Kraft

$$\sum_1^{n+1} E'_i$$

erzeugt werden. Wir würden also das gleiche mittlere Feld messen, wenn jedes Molekül, anstatt des wirklichen, von Molekül zu Molekül veränderlichen Feldes, dem Felde

$$\frac{\sum_1^{n+1} E'_i}{n+1}$$

ausgesetzt wäre, und es erhellt, daß im allgemeinen Falle der gesuchte Mittelwert der erregenden Kraft die Beziehung

$$E' = \sum W(i_1 \dots i_n) \cdot E'(i_1 \dots i_n)$$

erfüllen würde. Es liegt auf der Hand, daß dies Ergebnis nicht nur für Gase, sondern für eine jede strukturlose Substanz seine Gültigkeit beibehält.

Insofern die Moleküle ganz unregelmäßig verteilt sind, nur mit der einzigen Beschränkung, daß ihr kleinstter Abstand nicht unter die Grenze  $r_0$  hinabsinken mag, bekommen wir offenbar gerade den Mittelwert

$$E' = \sum W(i_1 \dots i_n) \cdot E'(i_1 \dots i_n),$$

wenn wir die Integration auch auf den Bereich  $\Omega$  zwischen den beiden Kugelflächen ausdehnen, und mit diesem Ergebnis ist die Zulässigkeit unseres Integrationsverfahrens dargetan.

Wir setzen also:

$$(1a) \quad \mathfrak{E}' = \mathfrak{E}_0 + \text{rot rot} \int_{r > r_0} \frac{\mathfrak{P} \left( t - \frac{r}{c} \right)}{r} d\tau;$$

$$(2a) \quad \mathfrak{H}' = \mathfrak{H}_0 + \frac{1}{c} \text{rot} \int_{r > r_0} \frac{\mathfrak{P} \left( t - \frac{r}{c} \right)}{r} d\tau.$$

Der Mittelwert  $\mathfrak{E}'$  besitzt aber noch eine wichtige Bedeutung. Wir fassen einen beliebigen Raumpunkt in einem gaserfüllten Raum in die Augen. Im Laufe der Zeit wird der Abstand des Punktes vom nächsten Molekülmittelpunkte von Null ab bis an eine gewisse obere Grenze schwanken. Wir wollen den Punkt als äußeren bezeichnen zu den Augenblicken, wo dieser Abstand  $> r_0$  ist, aber als inneren, wenn er  $< r_0$  ist. Dann stellt offenbar  $\mathfrak{E}'$  das örtliche Feld dar, über diejenigen Zeiten gemittelt, wo der Punkt ein äußerer ist. Und es dürfte jetzt augenfällig sein, daß  $\mathfrak{E}'$  mit einer Annäherung, die mit der Molekülzahl  $n + 1$  im Kugelraume wächst, das elektrische Feld über alle äußeren Punkte in der Kugel gemittelt darstellt, und zwar nicht nur in Gasen, sondern überhaupt in strukturlosen Körpern.

Wir spezialisieren von nun an unser Problem, indem wir die Schwingungen der Molekularresonatoren harmonisch annehmen, so daß wir bekommen

$$(4) \quad \mathfrak{P} = \mathfrak{Q} e^{i\omega t};$$

des weiteren nehmen wir an, daß  $\mathfrak{Q}$  die Beziehung

$$(5) \quad \Delta \mathfrak{Q} = - \frac{\omega^2 n^2}{c^2} \mathfrak{Q}$$

befolgt, wo  $n$  den reellen oder komplexen Brechungsindex des Körpers und  $\omega$  die Frequenz der Welle bedeutet.

Der Vektor  $\mathfrak{Q}$  ist im allgemeinsten Falle aus vier Gründen mit dem Orte veränderlich: wegen der Wellenbewegung, wegen der Absorption des Lichtes, wegen etwaiger Intensitätsunterschiede im einfallenden Lichtbündel und wegen mikro- und makroskopischer Dichteunterschiede im Medium. Die letzte Ursache haben wir schon im voraus ausgeschlossen, und auch die dritte wird nur dann ins Spiel treten, wenn die Ungleichheiten

$$(6) \quad \left| \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial x} \right|_3 < \frac{\omega n}{c}; \quad \left| \frac{\partial^2 \mathfrak{D}}{\partial x^2} \right|_3 < \frac{\omega^2 n^2}{c^2}; \quad \text{usw.}$$

in bezug auf irgendwelche der Koordinaten versagen würde. Der Index 3 bedeutet, daß bei den Ableitungen in (6) nur die dritte Variabilitätsursache zu berücksichtigen ist. Das Fehlschlagen von (6) entbehrt offenbar jedes praktischen Interesse.

Die erregende elektrische Kraft ist bereits in der angeführten Arbeit von Oseen berechnet, und zwar unter der etwas allgemeineren Annahme, daß die Ungleichheiten (6) nicht erfüllt zu sein brauchen. Für uns ist diese Verallgemeinerung zwecklos; wir lassen darum den diesbezüglichen Term der Oseenschen Formel fort und erhalten

$$(7) \quad \mathfrak{E} = \frac{4\pi}{3} \frac{n^2 + 2}{n^2 - 1} \mathfrak{P},$$

wo die Bezeichnungen in leichtverständlicher Weise von den dortigen abweichen.

Für das Folgende bedürfen wir noch der magnetischen Feldstärke  $\mathfrak{H}$ , die nicht zuvor berechnet ist. Indem wir hier die Rechnungen ausführlich vollziehen, bekommen wir nebenbei eine Gelegenheit, die elegante Methode von Oseen zu erläutern.

Die Auseinanderlegung der beiden Teile der von den Molekülen ausgehenden Erregungen, derjenige, der die erregende Kraft bildet, und derjenige, der die einfallende Welle auslöscht, erfolgt in jener Theorie mittels einer Transformation des in (1a) und (2a) auftretenden Raumintegrals auf zwei Flächenintegrale, deren eines über das Kugelchen  $r = r_0$ , deren anderes über die ganze Oberfläche des Körpers zu erstrecken ist, und zwar ist jener Anteil der erregende, dieser der auslöschende.

Wir haben

$$\Delta \frac{e^{i\omega(t - \frac{r}{c})}}{r} = - \frac{\omega^2}{c^2} \frac{e^{i\omega(t - \frac{r}{c})}}{r}$$

und nach (5)

$$\Delta \mathfrak{D} = - \frac{\omega^2 n^2}{c^2} \mathfrak{D}.$$

Wenn wir bezeichnen

$$J = \int_{r > r_0} \frac{\mathfrak{P}(t - \frac{r}{c})}{r} d\tau = i\omega \int_{r > r_0} \mathfrak{D} \cdot \frac{e^{i\omega(t - \frac{r}{c})}}{r} d\tau,$$

so erfc'gt aus den obigen Formeln

$$i\omega \int_{r>r_0} \left[ \mathfrak{D} \cdot A \frac{e^{i\omega(t-\frac{r}{c})}}{r} - A \mathfrak{D} \cdot \frac{e^{i\omega(t-\frac{r}{c})}}{r} \right] d\tau = \frac{\omega^2}{c^2} (n^2 - 1) J.$$

Hier ist nun die Greensche Formel zu verwenden, damit wir die erwünschte Zerlegung bekommen mögen. Die äußere Normale des Integrationsbezirkes sei  $\nu$  genannt. Dann wird

$$\frac{\omega^2}{c^2} (n^2 - 1) J = i\omega \int \left[ \mathfrak{D} \frac{d}{d\nu} - \frac{d}{d\nu} \mathfrak{D} \right] \frac{e^{i\omega(t-\frac{r}{c})}}{r} d\sigma.$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} \mathfrak{H}' = \mathfrak{H}_0 + \frac{i\omega}{\omega(n^2 - 1)} \left\{ \text{rot} \int_{r=r_0} \left[ \mathfrak{D} \frac{d}{d\nu} - \frac{d}{d\nu} \mathfrak{D} \right] \frac{e^{i\omega(t-\frac{r}{c})}}{r} d\sigma \right. \\ \left. + \text{rot} \int_F \left[ \mathfrak{D} \frac{d}{d\nu} - \frac{d}{d\nu} \mathfrak{D} \right] \frac{e^{i\omega(t-\frac{r}{c})}}{r} d\sigma \right\}. \end{aligned}$$

Das letzte Glied, welches über die äußere Oberfläche  $F$  erstreckt ist, ist nun nach Oseen dasjenige Glied, welches die einfallende Welle aufhebt. Wir setzen demgemäß

$$\mathfrak{H}_0 + \frac{i\omega}{\omega(n^2 - 1)} \text{rot} \int_F \left[ \mathfrak{D} \frac{d}{d\nu} - \frac{d}{d\nu} \mathfrak{D} \right] \frac{e^{i\omega(t-\frac{r}{c})}}{r} d\sigma = 0$$

und erhalten somit für die erregende magnetische Kraft

$$\mathfrak{H}' = \frac{i\omega}{\omega(n^2 - 1)} \text{rot} \int_{r=r_0} \left[ \mathfrak{D} \frac{d}{d\nu} - \frac{d}{d\nu} \mathfrak{D} \right] \frac{e^{i\omega(t-\frac{r}{c})}}{r} d\sigma$$

oder kürzer

$$(8) \quad \mathfrak{H}' = \frac{i\omega}{\omega(n^2 - 1)} (K_1 - K_2),$$

wo

$$(9) \quad K_1 = \text{rot} \int_{r=r_0} \mathfrak{D} \frac{d}{d\nu} \frac{e^{i\omega(t-\frac{r}{c})}}{r} d\sigma$$

und

$$(10) \quad K_2 = \operatorname{rot} \int_{r=r_0} \frac{d\Omega}{d\nu} \cdot \frac{e^{i\omega(t-\frac{r}{c})}}{r} d\sigma .$$

Man findet leicht

$$(11) \quad \operatorname{rot} \left[ \Omega \cdot \frac{e^{i\omega(t-\frac{r}{c})}}{r} \right] = \left( \frac{i\omega}{c} + \frac{1}{r} \right) \frac{e^{i\omega(t-\frac{r}{c})}}{r^2} \mathbf{r} \wedge \Omega$$

wo der Vektor  $\mathbf{r}$ , wie bereits erwähnt, vom Mittelpunkte der Kugel, wo das  $\operatorname{rot}$  zu nehmen ist, nach dem jedesmaligen Oberflächenelemente der Kugel weist. Aus (11) ergibt sich

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \left[ \Omega \frac{d}{d\nu} \frac{e^{i\omega(t-\frac{r}{c})}}{r} \right] &= - \operatorname{rot} \left[ \Omega \frac{d}{dr} \frac{e^{i\omega(t-\frac{r}{c})}}{r} \right] = \frac{i\omega}{c} \operatorname{rot} \\ \left[ \Omega \frac{e^{i\omega(t-\frac{r}{c})}}{r} \right] + \operatorname{rot} \left[ \Omega \cdot \frac{e^{i\omega(t-\frac{r}{c})}}{r^2} \right] &= \left( -\frac{\omega^2}{c^2} + \frac{2i\omega}{cr} + \frac{2}{r^2} \right) \\ &\quad \cdot \frac{e^{i\omega(t-\frac{r}{c})}}{r^2} \mathbf{r} \wedge \Omega, \end{aligned}$$

und

$$\operatorname{rot} \left[ \frac{d\Omega}{d\nu} \cdot \frac{e^{i\omega(t-\frac{r}{c})}}{r} \right] = - \left( \frac{i\omega}{c} + \frac{1}{r} \right) \cdot \frac{e^{i\omega(t-\frac{r}{c})}}{r^2} \mathbf{r} \wedge \frac{d\Omega}{dr} .$$

Um die Integrationen (9) und (10) zu erledigen, entwickeln wir, wo nötig, nach Potenzen von  $r$ :

$$e^{i\omega(t-\frac{r}{c})} = e^{i\omega t} - \frac{i\omega r}{c} e^{i\omega t} - \dots$$

$$\mathbf{r} \wedge \Omega(\mathbf{r}) = \mathbf{r} \wedge \Omega(0) + \mathbf{r} \wedge (\mathbf{r} \times \operatorname{grad} \Omega(0)) + \dots$$

$$\mathbf{r} \wedge \frac{d\Omega(\mathbf{r})}{dr} = \frac{r}{r} \wedge (\mathbf{r} \times \operatorname{grad} \Omega(0)) + \dots$$

wo  $\Omega(\mathbf{r})$  den Wert der Funktion  $\Omega$  im Pfeilpunkte des Vektors  $\mathbf{r}$  und  $\Omega(0)$  den Wert im Kugelmittelpunkte bedeuten. In den Entwicklungen sind nur so viele Glieder mitgenommen, wie wir sie wirklich brauchen. Die folgenden Glieder würden in (9) und (10) noch eine Reihe von Gliedern beigeben, die jedoch mit  $r_0$  verschwinden und die infolge des tatsächlichen

sehr kleinen Betrages dieser Größe gewiß nicht merklich mitspielen werden.

Die Integrationen ergeben

$$K_1 = \frac{8\pi}{3} \operatorname{rot} \mathfrak{D}(0) e^{i\omega t}$$

und

$$K_2 = -\frac{4\pi}{3} \operatorname{rot} \mathfrak{D}(0) e^{i\omega t}.$$

Jetzt folgt aus (4) und (8)

$$\mathfrak{H}' = \frac{i\sigma}{\omega(n^2 - 1)} \cdot 4\pi \operatorname{rot} \mathfrak{P}.$$

Die Bedingung (6) vorausgesetzt, läßt sich diese Gleichung in die Form

$$(12) \quad \mathfrak{H}' = \frac{4\pi n}{n^2 - 1} \mathfrak{n} \wedge \mathfrak{P}$$

bringen. Hier ist  $\mathfrak{n}$  der Einheitsvektor der Strahlrichtung. Gleichung (12) bringt ersichtlich die Transversalität der magnetischen Kraft zum Ausdruck. Mit dieser Formel ist unsere Aufgabe erledigt.

In sehr einleuchtender Weise tritt unser Problem jetzt vor Augen, wo wir  $\mathfrak{E}'$  und  $\mathfrak{H}'$  in die Formen (7) bzw. (12) gesetzt haben. Denn erstens können wir behaupten, daß wenigstens eine dieser Größen von den Größen  $\mathfrak{E}$  bzw.  $\mathfrak{H}$  in den Maxwellschen Gleichungen verschieden sein muß. Wegen der Gleichung

$$-\frac{1}{\sigma} \dot{\mathfrak{H}} = \operatorname{rot} \mathfrak{E}$$

hätten wir nämlich anderenfalls

$$-\frac{1}{\sigma} \frac{4\pi n}{n^2 - 1} \cdot \mathfrak{n} \wedge \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial t} = \frac{4\pi}{3} \frac{n^2 + 2}{n^2 - 1} \operatorname{rot} \mathfrak{P} \quad (?)$$

und diese Beziehung ist ersichtlich nicht erfüllt.

Betrachten wir nun zweitens einen Bereich, der hinreichend viele Moleküle enthält und doch klein genug ist, so daß man dort mittelnd an den Maxwellschen Mittelwerten anlange. Wie bereits hervorgehoben, stellen die Größen  $\mathfrak{E}'$  und  $\mathfrak{H}'$  drinnen überall außerhalb der Moleküle das gesamte von allen Molekülen herkommende Feld dar und in den Molekülen denjenigen Teil, der von außen kommt. Wenn, wie wir jetzt wissen, die so bestimmten Felder noch nicht die Maxwellschen Mittelwerte sind, müssen wir unumgänglich

schließen, daß die Ursache der Diskrepanz in den *intramolekularen* Feldern zu suchen ist.

### § 3. Die Beziehung zwischen $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{G}$ .

Wir denken uns die Polarisation derart, daß sich eine positive Ladung  $+e$  aus dem Molekülmittelpunkte in der Richtung der erregenden Kraft um die Strecke  $+a$  verschoben hat und eine negative Ladung  $-e$  um eine gleiche Strecke im entgegengesetzten Sinne. Die beiden Kerne veranlassen überall in ihrer Nähe eine dielektrische Verschiebung im Äther. Wir wünschen nun zu wissen, um wieviel diese Verschiebung zu den gemittelten Maxwellschen Feldern beisteuert. Die von unserem Molekül außerhalb der Kugelfläche  $r = r_0$  verursachten elektromagnetischen Felder sind bereits durch  $\mathfrak{E}$  in Rechnung gezogen; wir haben also nur das Integral der Verschiebungen über das Kugelinnere zu ermitteln.

Es sei bemerkt, daß die über die Polarisation getroffene Voraussetzung, daß sich beide Kerne um ebensoviel vom Mittelpunkte entfernen, selbstverständlich nicht mit dem Tatbestande übereinstimmt. Es wäre gewiß richtiger, den positiven Kern als fest zu erachten. Man wird sich aber leicht nachträglich überzeugen, daß, insofern die Schwingungen der Elektronen gegen den kleinsten Molekülabstand klein sind, unsere vereinfachende Annahme für die Ergebnisse gänzlich belanglos ist.

Die lokalen Verschiebungen berechnen wir nach dem Coulombschen Gesetze, betrachten also das Problem schlechthin als ein elektrostatisches. Wir stehen dabei mit den üblichen Annahmen und Erfahrungen im Einklang, die in der Hertzschen Lösung ihren Ausdruck gefunden haben. Wir schreiben demgemäß

$$\mathfrak{e} = -\text{grad} \left( \frac{e}{r_1} - \frac{e}{r_2} \right),$$

wo  $\mathfrak{e}$  das Feld des Moleküls in einem Punkte in den Entfernungen  $r_1$  und  $r_2$  von der positiven bzw. negativen Ladung bedeutet.

Der Symmetrie halber werden sich jene Verschiebungskomponenten, die auf dem Momentvektor des polarisierten Moleküls senkrecht stehen, im Mittelwerte aufheben. Wenn wir Zylinderkoordinaten  $(r, \zeta)$  einführen, wie es die Figur erklärt, haben wir

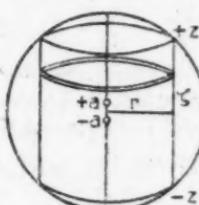


Fig. 1.

deshalb nur die  $\zeta$ -Komponenten zu berücksichtigen. Wir finden offenbar:

$$\int e d\tau = - \int_0^{r_0} \int_{-z}^{+z} 2\pi r dr d\zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{e}{\sqrt{r^2 + (\zeta - a)^2}} - \frac{e}{\sqrt{r^2 + (\zeta + a)^2}} \right),$$

wo  $r_0^2 = r^2 + z^2$ .

Das Integral

$$\begin{aligned} & - 2\pi r dr \int_{-z}^{+z} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{e}{\sqrt{r^2 + (\zeta - a)^2}} - \frac{e}{\sqrt{r^2 + (\zeta + a)^2}} \right) d\zeta \\ & = - 4\pi e r dr \left[ \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z - a)^2}} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z + a)^2}} \right] \end{aligned}$$

bedeutet den Beitrag eines zylindrischen Elementes des Kugelvolumens. Da die Verschiebungen in der Nähe der punktförmig vorausgesetzten elektrischen Ladungen nach dem Coulombschen Gesetze unendlich wären, ist es vielleicht nicht überflüssig, zu bemerken, daß jenes Integral mit abnehmendem  $r$  gegen Null strebt, so daß die folgende Integration von den Unendlichkeitsstellen unbeeinflußt ist. Wir dürfen demnach setzen

$$\int e d\tau = - 4\pi e \int_0^{r_0} r dr \left[ \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z - a)^2}} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z + a)^2}} \right]$$

oder wegen der Beziehung  $r_0^2 = r^2 + z^2$ :

$$\int e d\tau = - 4\pi e \int_0^{r_0} z dz \left[ \frac{1}{\sqrt{r_0^2 + a^2 - 2az}} - \frac{1}{\sqrt{r_0^2 + a^2 + 2az}} \right] = - \frac{8\pi ea}{3}$$

oder endlich, weil  $2e a = p$ :

$$(13) \quad \int e d\tau = - \frac{4\pi}{3} p.$$

Dieses ist also das Zusatzfeld eines jeden Moleküls. Wie wir ersehen, ergibt es sich als von dem Radius  $r_0$  unabhängig. *Pro Volumeneinheit bezogen, wird somit das Zusatzfeld infolge des Molekülinnenen  $- \frac{4\pi}{3} p$ , und wir bekommen*

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}' - \frac{4\pi}{3} p,$$

wie es nach (8) sein soll.

Formal ist also unsere Gleichung mit der ehemaligen identisch. Der Unterschied tritt zutage, wenn wir die einzelnen Glieder auf ihre physikalische Bedeutung interpretieren.

Nach der Anschauung, die der unsrigen am entferntesten ist — es gibt ja, wie wir gesehen haben, mehrere Zwischenstufen —, würde  $\mathfrak{E}$  etwa derjenige Anteil des Feldes sein, der von den Elektronen der Lichtquelle stammt, und der von außen im ponderablen Körper eindringt, dabei freilich andere Ausbreitungsgesetze als im Vakuum befolgend. Und das zweite Glied wäre die Einwirkung der Körpermoleküle. Für uns kommt dagegen  $\mathfrak{E}'$  ganz und gar von den Molekülen des betrachteten Körpers her, die allerdings zudem noch die „auslöschende“ Strahlung entsenden, und das Polarisationsglied ist, was wir von den inneren Feldern der Molekülen wahrnehmen.

Ich möchte darauf hinweisen, daß das berechnete intramolekulare Feld natürlich nicht auf anisotrope und auch nicht auf kristallinische Körper übertragen werden darf. Denn die soeben ausgeführte Integration ist nicht von der Form des Integrationsgebietes unabhängig, mag sie auch bei festgesetzter Form innerhalb gewisser Grenzen von den Dimensionen unabhängig sein. Handelt es sich z. B. um einen Kristall, so muß sowohl die Oseensche erregende Kraft, die durch Integration über eine Kugelfläche gewonnen wird, wie unsere inneren Felder durch andere Ausdrücke ersetzt werden, jedoch dermaßen, daß sich immer bei Superposition beider die richtige Maxwell'sche  $\mathfrak{E}$  einstellt.

Die erregende *magnetische Kraft*, deckt sie sich mit dem Maxwell'schen  $\mathfrak{H}$ , wie es die früheren Theorien fordern? Dieses Thema könnte natürlich analog dem obigen mathematisch behandelt werden; es dürfte aber ebenso einleuchtend sein, unmittelbar aus dem physikalischen Bilde darüber zu urteilen. In der Tat müssen ja die magnetischen Felder rings um eine Molekel, deren Polarisation sich ändert, wegen der Symmetrie vollkommene Kreislinien sein, so daß sie den Mittelwert der magnetischen Kraft nicht zu beeinflussen vermögen. Wir haben folglich

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}'.$$

Führen wir nun die vorher ermittelten Werte (7) und (12) für  $\mathfrak{E}'$  bzw.  $\mathfrak{H}'$  ein, erhalten wir somit

$$(14) \quad \mathfrak{E} = 4\pi \frac{1}{n^2 - 1} \mathfrak{B};$$

$$(15) \quad \mathfrak{H} = 4\pi \cdot \frac{n}{n^2 - 1} \mathfrak{u} \wedge \mathfrak{B}.$$

Wenn wir einstweilen der Lorentzschen Theorie die Beziehung  $\mathfrak{D} = \mathfrak{E} + 4\pi \mathfrak{P}$  für die elektrische Induktion im ponderablen Medium entnehmen, wird des weiteren

$$(16) \quad \mathfrak{D} = 4\pi \frac{n^2}{n^2 - 1} \mathfrak{P},$$

und jetzt können wir uns durch Einsetzung davon überzeugen, daß unsere  $\mathfrak{E}$ ,  $\mathfrak{H}$  und  $\mathfrak{D}$  in der Tat die Maxwellschen Gleichungen befriedigen. Wir könnten auch, die Formeln

$$U = \frac{\mathfrak{E} \mathfrak{D}}{8\pi}; \quad T = \frac{\mathfrak{H}^2}{8\pi};$$

verwendend, die elektrische und magnetische Feldenergie so gleich dahinschreiben:

$$(17) \quad U = T = 2\pi \frac{n^2}{(n^2 - 1)^2} \mathfrak{P}^2.$$

Die Gültigkeitsbedingungen dieses Ausdruckes müssen indessen einer besonderen Untersuchung unterworfen werden; diese zu liefern, ist der Zweck des folgenden Paragraphen.

#### § 4. Die Energie des elektromagnetischen Feldes.

Die Energieformeln der Maxwellschen Theorie

$$(18) \quad U = \frac{\mathfrak{E} \mathfrak{D}}{8\pi}; \quad T = \frac{\mathfrak{H}^2}{8\pi};$$

sind bekanntlich von einer gewissen Willkür belästigt. Ihre Rechtfertigung finden sie lediglich durch die bestätigenden Prüfungen, denen man ihre Folgerungen hat unterziehen können. Infolge dieser Unsicherheit muß ihre Richtigkeit bei jeder Erweiterung des Verwendungsbereiches immer wieder in Frage gestellt und, wenn möglich, zur experimentellen Prüfung gebracht werden.

Aus der Gültigkeit von (18) im Vakuum können wir nur insofern Schlüsse auf die Energieformeln in absorbierenden Medien ziehen, daß wir immer die Gesamtenergie als eine homogene Funktion zweiten Grades in  $\mathfrak{E}$ ,  $\mathfrak{D}$  und  $\mathfrak{H}$ , oder, was nach dem Vorstehenden auf das gleiche herauskommt, in  $\mathfrak{P}$ , anzusehen genötigt sind, und zwar folgt dies schon aus der Unabhängigkeit des Absorptionskoeffizienten von der Intensität des Lichtes.

Wir denken uns, um dies zu zeigen, eine planparallele Schicht der absorbierenden Substanz. Ihre Dicke sei  $l$ . Ein Lichtstrahl durchsetze sie in der Richtung der Normalen. Die Intensität vor der Schicht sei  $J_0$  und hinter derselben  $J_1$ .

Innerhalb der Schicht befolge die Polarisation das Gesetz

$$(19) \quad \mathfrak{P} = P e^{i\omega \left(t - \frac{nx}{c}\right)} = P e^{-\frac{nx}{c} z} e^{i\omega \left(t - \frac{nx}{c}\right)},$$

wo die  $z$ -Achse in der Richtung des Strahles liegt. Alsdann können wir die pro Quadratzentimeter und Sekunde absorbierte Energie  $A$  zweitwegen berechnen.

Denn wenn wir die Intensität durch die pro Quadratzentimeter und Sekunde einfallende Energie messen, ist einerseits

$$A = J_0 - J_i = \frac{e}{4\pi} (\mathfrak{E}_0^2 - \mathfrak{E}_i^2),$$

wo die Mittelung sich auf die Zeit bezieht. Andererseits können wir aber sie auch aus den Größen  $P$ ,  $v$  und  $z$  berechnen, die die Verhältnisse im Schichtinneren bestimmen. Für die gesuchte Feldenergie setzen wir

$$W = f(P, v, z),$$

oder, weil wir nur  $P$  bei dem Versuche als veränderlich vor-  
aussetzen

$$W = f(P).$$

Es sei ferner  $V$  die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Energie in der Schicht. Dann bekommen wir

$$(20) \quad A = - \int_0^l \frac{dW}{dx} V dx.$$

Wir müssen also haben

$$\frac{e}{4\pi} (\mathfrak{E}_0^2 - \mathfrak{E}_i^2) = - V \int_0^l \frac{dW}{dx} dx = V [f(P_0) - f(P_i)].$$

Infolge der Grenzbedingungen gilt aber eine Beziehung zwischen der Feldstärke  $\mathfrak{E}_0$  bzw.  $\mathfrak{E}_i$  außerhalb der Grenzflächen und der Polarisation  $\mathfrak{P}_0$  bzw.  $\mathfrak{P}_i$  innerhalb derselben. Wenn  $k^2$  eine Konstante ist, muß sich diese Beziehung auf die Form

$$\mathfrak{E}_0^2 = k^2 P_0^2; \quad \mathfrak{E}_i^2 = k^2 P_i^2$$

bringen lassen, und folglich

$$\frac{ek^2}{4\pi} (P_0^2 - P_i^2) = V (f(P_0) - f(P_i)).$$

Damit diese Gleichung für alle Werte von  $P$  erfüllt sein mag, muß offenbar

$$f(P) \sim P^2$$

und folglich  $W$  eine homogene Funktion zweiten Grades der zu  $P$  proportionalen Größen  $\mathfrak{E}$ ,  $\mathfrak{D}$  und  $\mathfrak{H}$  sein.

Jede weiter gehende Spezialisierung der Energieformeln ist als ein durchweg hypothetischer Schritt zu erachten. Wenn wir jetzt nichtsdestoweniger vermöge der sehr nahe liegenden Analogie schreiben

$$U = \frac{\mathfrak{E} \mathfrak{D}}{8\pi}; \quad T = \frac{\mathfrak{H}^2}{8\pi}$$

und die Eigenschaften dieser Ausdrücke für absorbierende Medien rechnerisch ableiten, so geschieht dies in dem Bestreben, dadurch eine Prüfung und möglicherweise auch eine künftige Ergänzung der Formeln zu erleichtern.

Nach (14) und (16) haben wir

$$\mathfrak{E} = \frac{4\pi}{n^2 - 1} \mathfrak{P}; \quad \mathfrak{D} = \frac{4\pi n^2}{n^2 - 1} \mathfrak{P}.$$

Den Nullpunkt der Zeit verlegen wir so, daß  $\mathfrak{Q}$  in der Gleichung

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{Q} e^{i\omega t}$$

am betrachteten Orte keinen imaginären Teil besitzt. Der reelle Teil von  $\mathfrak{P}$  ist also

$$\mathfrak{Q}_1 \cos \omega t.$$

Wenn  $n = \nu - i\kappa$ , bekommt man leicht den reellen Teil von  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{D}$  in  $\nu$ ,  $\kappa$  und  $\mathfrak{Q}_1$  ausgedrückt. Wenn wir setzen

(21)  $\mathfrak{E} = E \mathfrak{Q}_1 \cos(\omega t + \delta_e)$ ;  $\mathfrak{D} = D \mathfrak{Q}_1 \cos(\omega t + \delta_d)$ ;

so ergeben sich die Beziehungen

$$(22) \quad E = \frac{4\pi}{\sqrt{(\nu^2 - \kappa^2 - 1)^2 + 4\nu^2\kappa^2}}; \quad \delta_e = \operatorname{arctg} \frac{2\nu\kappa}{\nu^2 - \kappa^2 - 1};$$

$$(23) \quad D = \frac{4\pi(\nu^2 + \kappa^2)}{\sqrt{(\nu^2 - \kappa^2 - 1)^2 + 4\nu^2\kappa^2}}; \quad \delta_d = \operatorname{arctg} \frac{2\nu\kappa}{(\nu^2 + \kappa^2)^2 - (\nu^2 - \kappa^2)}.$$

Von diesen Gleichungen finden sich die ersten zwei in etwas verschiedener Gestalt auch in einer Arbeit von Goldhammer.<sup>1)</sup>

Der zeitliche Mittelwert von  $U$  wird nach den obigen Formeln

$$(24) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{U} = \frac{ED}{8\pi} \mathfrak{Q}_1^2 \cdot \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \cos(\omega t + \delta_e) \cos(\omega t + \delta_d) dt \\ = \frac{ED}{16\pi} \mathfrak{Q}_1^2 \cos(\delta_e - \delta_d) = \frac{\pi(\nu^2 - \kappa^2)}{(\nu^2 - \kappa^2 - 1)^2 + 4\nu^2\kappa^2} \mathfrak{Q}_1^2. \end{array} \right.$$

1) D. A. Goldhammer, Dispersion und Absorption des Lichtes, p. 41. Leipzig, B. G. Teubner, 1913.

Aus (15) ergibt sich in ganz gleichartiger Weise

$$(25) \quad \mathfrak{H} = H \mathfrak{D}_1 \cos (\omega t + \delta_h);$$

$$(26) \quad H = 4\pi \sqrt{\frac{\nu^2 + x^2}{(\nu^2 - x^2 - 1)^2 + 4\nu^2 x^2}}; \quad \delta_h = \arctg \frac{x(\nu^2 + x^2 + 1)}{\nu(\nu^2 + x^2 - 1)};$$

und für die magnetische Feldenergie

$$(27) \quad \bar{T} = \frac{H^2}{16\pi} \mathfrak{D}_1^2 = \frac{\pi(\nu^2 + x^2)}{(\nu^2 - x^2 - 1)^2 + 4\nu^2 x^2} \mathfrak{D}_1^2.$$

Man sieht, daß  $\mathfrak{E}$ ,  $\mathfrak{H}$  und  $\mathfrak{D}$  sämtlich  $\mathfrak{P}$  vorausseilen, und zwar  $\mathfrak{E}$  am meisten,  $\mathfrak{D}$  am wenigsten. Die Phasendifferenz  $\delta_e$  kann sogar unter Umständen  $\pi/2$  übersteigen,  $\delta_h$  und  $\delta_d$  dagegen nicht, wenigstens, wenn wir  $\nu > 1$  voraussetzen.

$\delta_h$  ist das arithmetische Mittel von  $\delta_e$  und  $\delta_d$ ,  $H$  das geometrische Mittel von  $E$  und  $D$ , wie man auch aus den Maxwell'schen Gleichungen unmittelbar finden kann.

Diese letztgenannten einfachen Beziehungen gestatten uns, auch der Gesamtenergie  $W$  sehr einfache Gestalt zu geben. Wir finden

$$(28) \quad \bar{W} = \bar{U} + \bar{T} = \frac{ED}{8\pi} \mathfrak{D}_1^2 \cos^2(\delta_h - \delta_e) = \frac{2\pi\nu^3}{(\nu^2 - x^2 - 1)^2 + 4\nu^2 x^2} \mathfrak{D}_1^2.$$

Die Energiewerte  $\bar{U}$  und  $\bar{T}$ , welche an die Stelle von (17) treten, stimmen im allgemeinen *weder untereinander noch mit dem reellen Teile von (17)* überein.

Eine eingehende Erörterung der ziemlich komplizierten Ausdrücke (21) bis (28) würde zu weitläufig sein, als daß sie hier Platz finden könnte. Statt dessen geben wir in der nachstehenden Tabelle die Berechnungsergebnisse für eine experimentell untersuchte Substanz, nämlich das Wasser, nach Beobachtungen von Rubens und Ladenburg.<sup>1)</sup> Die Abweichungen von den Eigenschaften des absorptionsfreien Körpers sind ersichtlich erst bei einer sehr bedeutenden Absorption zu erkennen. Im (unten nicht angeführten) Spektralbereiche zwischen 1,0 und 2,5  $\mu$ , wo doch schon eine zentimeterdicke Schicht ausreicht, um eine beinahe völlige Absorption zu erlangen, sind die Abweichungen so winzig, daß man davon gänzlich absehen kann.

1) H. Rubens u. E. Ladenburg, Verh. d. D. Phys. Ges. 11, p. 16. 1909.

$\lambda$	$\nu$	$\kappa$	$E$	$D$	$\delta_e$	$\delta_d$	$\bar{U}$	$\bar{T}$
2,4 $\mu$	1,275	—	20,1	32,6	—	—	13,04 $\mathfrak{D}^2$	13,04 $\mathfrak{D}^2$
2,6	1,253	0,011	22,0	34,5	2,8*	1,8*	15,11	15,11
2,8	1,282	0,050	19,2	31,8	11,3	6,8	12,11	12,15
3,0	1,365	0,175	13,1	24,8	29,9	15,2	6,26	6,47
3,2	1,456	0,169	10,5	22,6	24,3	11,0	4,59	4,72
3,4	1,437	0,039	11,8	24,3	6,0	2,9	5,68	5,69
3,6	1,384	0,014	13,7	26,2	2,4	1,3	7,16	7,16
3,8	1,353	—	15,1	27,7	—	—	8,33	8,33
4,0	1,338	—	15,9	28,5	—	—	9,01	9,01
4,5	1,343	0,016	15,6	28,1	3,1	1,7	8,74	8,74
5,0	1,330	—	16,3	28,9	—	—	9,38	9,38
5,5	1,300	—	18,2	30,7	—	—	11,16	11,16
5,8	1,271	0,042	20,2	32,7	9,9	6,1	13,11	13,14
6,0	1,324	0,102	15,9	28,0	20,0	11,2	8,74	8,85
6,2	1,360	0,099	14,2	26,5	17,8	9,4	7,44	7,52
6,5	1,334	0,053	15,9	28,4	10,3	5,7	8,95	8,98
7,0	1,327	0,045	16,4	28,8	8,9	5,0	9,36	9,38
8,0	1,293	0,048	18,4	30,8	10,5	6,1	11,29	11,31
9,0	1,264	0,050	20,7	33,2	12,0	7,4	13,57	13,62
10,0	1,196	0,056	28,1	40,2	17,4	12,1	22,40	22,49
11,0	1,150	0,105	31,8	42,5	37,8	27,3	26,46	26,91
12,0	1,187	0,247	18,4	27,1	59,3	35,8	9,12	9,94
13,0	1,269	0,299	13,7	23,2	55,5	29,1	5,64	6,30
15,0	1,332	0,426	9,9	19,2	62,4	27,0	3,05	3,74
18,0	1,505	0,428	7,5	18,3	50,0	18,2	2,31	2,72

Zu den bereits angeführten Formeln fügen wir noch eine. Sie betrifft die Energie, die in einer absorbierenden Schicht den einfallenden Wellen entzogen wird. Akzeptieren wir (18) und (20), so erfolgt aus dem Ansatz (19):

$$(29) \quad A = - \int_0^l \frac{d \bar{W}}{dx} \cdot V dx = V \left( 1 - e^{-\frac{2\omega n}{c} l} \right) \bar{W}_0,$$

oder nach (28), wenn wir zudem für  $V$  die Phasengeschwindigkeit  $c/\nu$  einführen

$$(29a) \quad A = 2\pi \left( 1 - e^{-\frac{2\omega n}{c} l} \right) \frac{e \nu}{(\nu^2 - x^2 - 1)^2 + 4\nu^2 x^2} \mathfrak{D}_1^2.$$

Wir sind somit vor einer Beziehung zwischen den wenigstens prinzipiell beobachtbaren Größen  $A$ ,  $\nu$  und  $x$  angelangt.

Upsala, Fysiska Institutionen, 25. Mai 1918.

(Eingegangen 31. Mai 1918.)

**3. Elementare Theorie der atmosphärischen  
Spiegelungen;**  
**von Alfred Wegener.**

Die häufigen Luftspiegelungen, sowohl nach oben wie nach unten, die ich während meines im ganzen vierjährigen Aufenthaltes in Grönland zu beobachten Gelegenheit hatte<sup>1)</sup>, und die ein ausgezeichnetes Material für eine Prüfung der Theorie abgeben werden, veranlaßten mich zu einer Beschäftigung mit den vorhandenen, wesentlich auf Tait und Biot basierenden theoretischen Arbeiten, und führten mich dadurch bald zu der Einsicht, daß diese mehr für experimentelle Untersuchungen im Laboratorium zugeschnitten sind als für die atmosphärischen Spiegelungen. Dies hat auch einer der neueren Theoretiker auf diesem Gebiete, W. Hillers, selber ausgesprochen: „Für die Untersuchung der wirklichen atmosphärischen Luftspiegelungen mit ihren labilen Verhältnissen, die kaum eindeutig aus gegebenen Bedingungen zu entwickeln sind wie jene im Experiment; wird die Behandlung wohl noch „phänomenologisch“ bleiben müssen. Eine Spiegelung wird „erklärt“ sein, wenn es geglückt ist, die Erscheinungen aus einer beobachteten Temperaturfunktion berechnet zu haben. Einer solchen Durchrechnung stellen sich aber meist außerordentliche mathematische Schwierigkeiten entgegen, auch wenn die zur Berechnung notwendige Temperaturfunktion genügend genau bekannt wäre. Schon die jetzt in den meisten Handbüchern wiedergegebene Darstellung nach Tait der Vinceschen Luftspiegelung läßt das

1) Einen Teil dieser Beobachtungen (mit zahlreichen Abbildungen) findet man im Wetterjournal der „Meteorologiske Terminbeobachtungen am Danmarks-Havn“, Danmark-Ekspeditionen til Grönlands Nordøstkyst 1906—1908. Bd. II. No. 4 (Meddelelser om Grönland, Bd. XLII), Kopenhagen 1911. Das (meist photographische) Material von der Grönland-durchquerung mit Koch 1912/13 ist noch nicht veröffentlicht.

erkennen.“<sup>1)</sup> Der Grund liegt darin, daß man meint, der Temperaturverlauf mit der Höhe müsse unter allen Umständen ein stetiger sein, und es dürften also keine Temperatursprünge vorkommen. Man suchte also nach einer solchen stetigen Funktion, welche imstande war, Spiegelbilder zu liefern, und der Erfolg der theoretischen Behandlung hing dann davon ab, ob sich diese Funktion integrieren ließ, so daß man die Gleichung der Lichtkurve ableiten konnte. Dieser Ansatz erscheint für atmosphärische Spiegelungen, namentlich solche nach oben, die durch eine über dem Beobachter gelegene Temperaturinversion erzeugt werden, recht ungeeignet. Auf der Danmark-Expedition habe ich für 7 Fälle mit Spiegelung nach oben Höhenlage und Betrag der Inversion mit Drachen oder Fesselballon ermittelt und die vertikale Temperaturverteilung durch Zustandskurven nach den Registrierungen dargestellt.<sup>2)</sup> Wie nach unserer heutigen Kenntnis der Inversionen ohnehin zu erwarten war, zeigte sich, daß das Aussehen dieser Zustandskurven von Fall zu Fall und auch zeitlich (zwischen Aufstieg und Abstieg) sehr variierte. Es erscheint gänzlich ausgeschlossen, hier eine mittlere Form zu finden, die man etwa versuchen könnte, analytisch darzustellen. Aber etwas Gemeinsames ist in diesen Kurven doch zu erkennen: sie erscheinen sämtlich als Unstetigkeiten des Temperaturverlaufes, durch welche die Luft in zwei Schichten, eine untere kalte und eine obere warme, zerlegt wird. Freilich ist dieser Temperatursprung nicht scharf, sondern durch teilweise Mischung der Schichten verwaschen; aber diese Mischung ist so verschieden weit vorgeschritten und zeigt im einzelnen ein so verschiedenes Aussehen, daß es unzweifelhaft das Naturgemäße ist, sie in erster Näherung zu vernachlässigen und mit einem scharfen Temperatursprung zu rechnen, den die bisherige Theorie gerade prinzipiell ausschloß. Man ist ja auch auf anderen Gebieten längst an diese Auffassung gewöhnt, daß die Inversionen Diskontinuitätsflächen zwischen verschieden temperierten Luftsichten sind, ein

1) W. Hillers, Photographische Aufnahme einer mehrfachen Luftsiegelung. *Physik. Zeitschr.* 14. p. 718 u. 719. 1913.

2) A. Wegener, Drachen- und Fesselballonaufstiege. *Danmark-Ekspeditionen til Grönlands Nordostkyst 1906—1908.* Bd. II. Nr. 1 (Meddelelser om Grönland, Bd. XLII). Kopenhagen 1909.

Begriff, der zuerst von Helmholtz eingeführt wurde und sogleich zur Erklärung der Luftwogen und Wogenwolken führte. Auch auf dem Gebiete der atmosphärischen Spiegelungen bringt diese Auffassung der Inversionen als Diskontinuitätsflächen, wie gezeigt werden wird, eine ungeheure Vereinfachung des Problems und gestattet, mit elementaren Hilfsmitteln eine Theorie abzuleiten, welche eine weitgehende Vergleichung mit den Beobachtungen ermöglicht.

Noch in einem zweiten wichtigen Punkte weicht die vorliegende Theorie von der bisherigen ab: die Krümmung der Erdoberfläche, durch deren Mitnahme die alte Theorie hoffnungslos kompliziert geworden wäre, konnte jetzt ohne Schwierigkeit berücksichtigt werden. Es zeigte sich dabei, daß gerade durch sie manche Erscheinungen überhaupt erst ihre Erklärung finden, so daß schon wegen ihres Fehlens die alte Theorie ganz unzulänglich erscheint. Man kann sich dies leicht an einigen Zahlen klarmachen, nämlich wenn man berücksichtigt, wieviel stärker die Erdkrümmung ist als die der Lichtstrahlen. Der Krümmungsradius der (allein in Frage kommenden) nahe horizontalen Lichtstrahlen ist nämlich bei einem Temperaturgefälle von  $3,4^{\circ}$  pro 100 m Höhe unendlich, bei Isothermie beträgt er immer noch ca. 4 Erdradien, und erst bei einem umgekehrten Gefälle von  $11^{\circ}$  pro 100 m Höhe wird er gleich dem Erdradius; sein gewöhnlichster Wert ist gleich 7 Erdradien. Unter diesen Umständen müssen also die Erscheinungen durch die Erdkrümmung ganz wesentlich beeinflußt werden, und es ist nicht zulässig, dieselbe zu vernachlässigen.<sup>1)</sup>

Im folgenden wird der Versuch gemacht werden, die

1) In der Tat hat sich diese Vernachlässigung bereits gerächt; denn noch niemand, auch nicht Pernter in seiner „Meteorologische Optik“ (Wien und Leipzig 1902) ist auf die richtige Erklärung der so häufig beschriebenen Verzerrung der Sonnenscheibe im Horizont gekommen, — eben weil sich die Theorie der Spiegelung nach oben nicht auf außerirdische Objekte anwenden läßt, solange man von der Erdkrümmung absieht. Die erste, qualitative Erklärung gab ich in meiner Abhandlung „Über die Ursache der Zerrbilder bei Sonnenuntergängen“ in Beitr. z. Phys. d. freien Atmosphäre. Bd. 4. Heft 1. Die dort der Einfachheit halber gemachte Annahme, daß innerhalb jeder der beiden Schichten der Lichtstrahl geradlinig verläuft, wird in der vorliegenden Arbeit aufgegeben.

atmosphärischen Spiegelungen unter der Annahme zu berechnen, daß an der Schichtgrenze ein scharfer Temperatursprung herrscht, so daß der Lichtstrahl hier eine Brechung bzw. Reflexion erleiden kann. Dagegen wird vorausgesetzt, daß innerhalb der beiden Schichten normale Brechungsverhältnisse herrschen, d. h. der Lichtstrahl einen flachen Kreisbogen beschreibt, wie es in der Theorie der terrestrischen Refraktion gewöhnlich angenommen wird. Und endlich wird die Krümmung der Erdoberfläche und die konzentrische Krümmung der Schichtgrenze (selbstverständlich unter der vereinfachenden Annahme der Kugelgestalt) berücksichtigt werden.

Das Verhältnis des Erdradius zum Krümmungsradius des Lichtstrahles wird bekanntlich als Koeffizient der terrestrischen Refraktion ( $k$ ) bezeichnet und kann entweder aus geodätischen Messungen oder aus dem Temperaturgefälle innerhalb der Schicht berechnet werden. Die Einführung von  $k$  in unsere Gleichungen gestattet also, auch das Temperaturgefälle innerhalb der Schichten zu berücksichtigen, wenn Beobachtungen darüber vorliegen. Ist dies nicht der Fall, so nimmt man für  $k$  einen mittleren Wert, worüber weiter unten nähere Angaben gemacht werden.

Wir werden in drei Abschnitten die Spiegelung nach oben, diejenige nach unten und die Zerrbilder der Sonne im Horizont behandelt.

### 1. Spiegelung nach oben.

Bei dieser Spiegelung liegt, wie erwähnt, eine Inversion oberhalb des Beobachters. Den Schlüssel zum Verständnis der Erscheinungen bietet der Satz, daß der *am Auge horizontal eintreffende Strahl an der Schichtgrenze mit dieser den kleinsten Winkel bildet*, d. h. den größten Einfallswinkel hat. Der Beweis hierfür läßt sich leicht aus Fig. 1 ableiten.

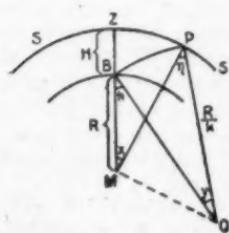


Fig. 1.

SS sei die Schichtgrenze. Der Beobachter  $B$  befindet sich an der Erdoberfläche. Vom Punkte  $P$  der Schichtgrenze erreicht ihn ein beliebiger Strahl  $PR$ , dessen Krümmungsmittelpunkt  $O$

zur Schichtgrenze  $SS'$  liegt. Der Winkel  $\alpha$  zwischen dem horizontalen Strahl  $PB$  und dem Strahl  $PR$  ist der Einfallswinkel, der Winkel  $\beta$  zwischen  $PB$  und dem gestrichelten Strahl  $PR'$  der Ausfallwinkel. Da  $PR$  ein Kreisbogen ist, so ist  $\alpha$  der kleinste Winkel, den  $PR$  mit der Schichtgrenze  $SS'$  bildet.

sei.  $M$  ist der Erdmittelpunkt.  $H$  sei die Höhe der Schichtgrenze, also  $MP = R + H$ , wo  $R$  der Erdradius ist. Nach der Definition von  $h$  ist  $OB = OP = R/k$ .  $\angle MBO = h$  ist gleich dem Höhenwinkel des Strahles beim Beobachter,  $\angle MPO = \eta = 90 - \alpha$  das Komplement des Einfallswinkels an der Schichtgrenze.

Das Quadrat der Seite  $MO$  ist nach dem Kosinussatz in den beiden Dreiecken  $MOB$  und  $MOP$ :

$$R^2 + \frac{R^2}{k^2} - 2 \frac{R^2}{k} \cos h = (R + H)^2 + \frac{R^2}{k^2} - 2 \frac{R}{k} (R + H) \cos \eta,$$

$$2 \frac{R}{k} (R + H) \cos \eta = (R + H)^2 - R^2 + 2 \frac{R^2}{k} \cos h,$$

$$\frac{R + H}{R} \cos \eta = \cos h + \frac{k}{2} \left[ \left( \frac{R + H}{R} \right)^2 - 1 \right].$$

Oder wenn wir  $\frac{H}{R} = \varepsilon$  setzen:

$$(1) \quad (1 + \varepsilon) \cos \eta = \cos h + \frac{k}{2} (2 \varepsilon + \varepsilon^2),$$

worin wir  $\cos \eta$  auch durch  $\sin \alpha$  ersetzen können. Da das zweite Glied der rechten Seite ebenso wie der Faktor  $(1 + \varepsilon)$  auf der linken nur von den vorgegebenen meteorologischen Bedingungen abhängt, ist ohne weiteres ersichtlich, daß der Einfallswinkel  $\alpha$  seinen größten oder  $\eta$  seinen kleinsten Wert erreicht, wenn  $\cos h = 1$  oder  $h = 0$  ist. Damit ist die Behauptung erwiesen.

Für jeden Wert von  $h > 0$  wird der Einfallswinkel  $\alpha$  einen kleineren Wert annehmen, und da  $\cos(-h) = \cos h$ , so erhält man denselben Wert  $\alpha$  auch für den gleichen Höhenwinkel mit entgegengesetztem Vorzeichen. Bezeichnen wir der Kürze halber den Strahl, der beim Beobachter horizontal eintrifft, als horizontalen Strahl, so können wir sagen: zu jedem Strahl oberhalb des horizontalen gehört ein symmetrischer unterhalb desselben, welcher an der Schichtgrenze den gleichen Einfallswinkel besitzt; der Einfallswinkel des horizontalen aber ist der größte.

Eine Spiegelung kann erst dann eintreten, wenn dieser Einfallswinkel den Grenzbetrag für Totalreflexion überschreitet. Vom Beobachter gesehen, muß sich dann die Spiegelung auf einen Streifen bestimmter Breite beschränken, dessen Mitte genau im astronomischen Horizont liegt.

In Fig. 2 stellt  $P_1 Z P$  die Schichtgrenze dar, und der flache Bogen  $P_1 P$  einen Strahl, welcher in  $P$  (und also auch in  $P_1$ ) an der Schichtgrenze gerade den Grenzeinfallsinkel



Fig. 2.

besitzt. Ziehen wir von allen Punkten der Schichtgrenze diese Grenzstrahlen, so erfüllen sie in ihrer Gesamtheit eine Kugelschale, in welcher sich der Beobachter und sein Objekt jedenfalls

befinden müssen, wenn eine Spiegelung zustande kommen soll; denn alle Strahlen, die von einem Punkte unterhalb der punktierten Kreislinie gezogen werden können, treffen die Schichtgrenze unter kleinerem Einfallsinkel und passieren sie also, ohne zurückgeworfen zu werden. Die Mächtigkeit dieser Kugelschale wollen wir deshalb die *Wirkungstiefe* der Inversion nennen. Sie ist nur abhängig von den Temperaturverhältnissen derselben.

Über den Einfluß der Entfernung auf die Art der gespiegelten Bilder läßt sich einiges aus Fig. 3 entnehmen.

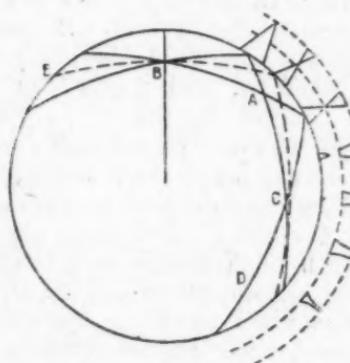


Fig. 3.

Vom Beobachter  $B$  sind darin die beiden Grenzstrahlen der Totalreflexion und der horizontale Strahl (dieser gestrichelt) gezeichnet. Rechnet man die rückwärtigen Verlängerungen bis  $E$  hinzzu, so sind die beiden Grenzstrahlen offenbar gleich lang; der horizontale Strahl aber ist kürzer.

Infolgedessen müssen auch die beiden Reflexionspunkte der Grenzstrahlen bei  $E$ ,  $A$  und  $D$  stets gleich weit von

einander entfernt sein, während der Reflexionspunkt des horizontalen Strahles sich bei jeder neuen Reflexion mehr gegen sie verschiebt. Der Strahlengang ist also nicht genau symmetrisch zur Reflexionsstelle  $A$ , und bei  $C$  schneiden sich nur die beiden Grenzstrahlen, während der horizontale

hier etwas oberhalb dieses Schnittpunktes verläuft. Immerhin ist aber die Symmetrie noch so weit gewahrt, daß alle total reflektierten Strahlen, die bei  $A$  einen erheblichen Raum einnehmen, sich bei  $C$  knotenartig zusammenziehen.  $BC$  ist demnach diejenige Entfernung, in welcher die Objekte die größte Vertikalverzerrung erfahren; denn ein Objekt von geringer Höhe, das sich hier befindet, füllt für den Beobachter die ganze Breite des spiegelnden Streifens aus. Dicht jenseits von  $A$ , vom Beobachter aus gerechnet, ist dagegen die geringste Verzerrung des Spiegelbildes zu erwarten. Auch zwischen  $C$  und  $D$  nimmt die Verzerrung wieder ab; doch hält sie sich hier im oberen Teile des Spiegelbildes noch bis zur Reflexionsstelle. In der Figur sind direktes Bild und Spiegelbild an dem Beispiel einer steilen Pyramide schematisch erläutert: Während das direkte Bild mit zunehmender Entfernung vom Beobachter mehr und mehr unter den Horizont versinkt, sind die Spiegelbilder an den total reflektierenden Streifen gebunden, der stets in gleicher Höhe liegt. Die Spiegelung beginnt zunächst im oberen Teile dieses Streifens; bei zunehmender Entfernung dehnt sich das Spiegelbild nach unten aus, so daß die Pyramidenspitze schließlich unterhalb des spiegelnden Streifens liegen würde und also unsichtbar ist. Bei der in  $C$  stattfindenden Maximalphase der Vertikalverzerrung tritt nun eine interessante Erscheinung ein: jenseits derselben erscheint das Spiegelbild wieder aufrechtes. *Die Vertikalverzerrung bildet also einen stetigen Übergang vom umgekehrten zum aufrechten Spiegelbilde.* Damit ist das Wesen dieser Vertikalverzerrung, die bei den Luftspiegelungen eine so überaus große Rolle spielt, erklärt.

Wir gehen nun dazu über, die Gleichungen für die quantitativen Berechnungen abzuleiten. Vorausgesetzt sei dabei die Berechnung des Brechungsquotienten der Schichtgrenze sowie des Refraktionskoeffizienten, da diese Größen fortwährend in den Gleichungen auftreten.

Um den *Brechungsquotienten der Schichtgrenze* aus dem dort herrschenden Drucke  $p$  und den absoluten Temperaturen  $T_1$  und  $T_2$  der unteren und oberen Schicht zu berechnen, berücksichtigen wir, daß sich nach einem empirischen Gesetz<sup>1)</sup>

1) Vgl. z. B. Chwolson, Lehrbuch d. Physik. 2. Bd. p. 372. Braunschweig 1904.

der absolute Brechungsquotient  $\nu$  der Luft (gegen den leeren Raum) mit der Luftdichte  $\varrho$  so verändert, daß der Ausdruck  $\frac{\nu - 1}{\varrho}$  konstant bleibt.

Es ist also

$$\nu = \frac{\varrho}{\varrho_0} (\nu_0 - 1) + 1,$$

wo sich  $\nu_0$  und  $\varrho_0$  auf Luft von  $0^\circ$  C und 760 mm Druck beziehen. Ferner ist nach einem bekannten Gesetz der Brechungsquotient der Schichtgrenze gleich dem Verhältnis der absoluten Brechungsquotienten der unteren und der oberen Schicht:

$$n = \frac{\nu_1}{\nu_2} = \frac{\frac{\varrho_1}{\varrho_0} (\nu_0 - 1) + 1}{\frac{\varrho_2}{\varrho_0} (\nu_0 - 1) + 1}.$$

Da nun

$$\frac{\varrho_1}{\varrho_0} = \frac{p}{760} \cdot \frac{273}{T_1} \quad \text{und} \quad \frac{\varrho_2}{\varrho_0} = \frac{p}{760} \cdot \frac{273}{T_2}$$

ist, so wird

$$n = \frac{\frac{p}{760} \cdot \frac{273}{T_1} (\nu_0 - 1) + 1}{\frac{p}{760} \cdot \frac{273}{T_2} (\nu_0 - 1) + 1}.$$

$\nu_0$  ist gleich 1,000294; wir können daher  $(\nu_0 - 1)$  als kleine Größe betrachten, und folglich auch den ganzen Ausdruck

$$\frac{p}{760} \cdot \frac{273}{T_2} (\nu_0 - 1);$$

daher können wir genähert schreiben:

$$n = \left[ \frac{p}{760} \cdot \frac{273}{T_1} (\nu_0 - 1) + 1 \right] \cdot \left[ 1 - \frac{p}{760} \cdot \frac{273}{T_2} (\nu_0 - 1) \right].$$

Multiplizieren wir aus und vernachlässigen  $(\nu_0 - 1)^2$ , so wird

$$n = 1 + \frac{p}{760} \cdot 273 (\nu_0 - 1) \left( \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right),$$

oder, wenn wir für  $\nu_0$  seinen Zahlenwert einführen und  $T_2 - T_1 = \Delta T$  setzen:

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} n = 1 + 0,000106 \frac{p}{T_1 T_2} \cdot \Delta T, \\ \text{oder wenn man } n - 1 = \delta \text{ setzt:} \\ \delta = 0,000106 \frac{p}{T_1 T_2} \cdot \Delta T, \end{array} \right.$$

wobei  $p$  in Millimetern auszudrücken ist. Da der Faktor  $p/T_1 T_2$  stets nahezu gleich  $1/100$  ist, so genügt für Überschlagszwecke meist die vereinfachte Formel:

$$(2a) \quad \delta = 10^{-6} \cdot \Delta T \cdot$$

Die genauere Formel (2) gibt z. B. für  $p = 750$  und  $T_1 = 273$  folgende Werte von  $\delta$  für eine Inversion von

$$\Delta T = \begin{array}{cccc} 2^\circ & 5^\circ & 10^\circ & 15^\circ \\ \delta = 0.0000021 & 0.0000052 & 0.0000103 & 0.0000152 \end{array}$$

Die Ermittlung des *Refraktionskoeffizienten*  $k$  ist eine bekannte Aufgabe der Geodäsie. Er wird dort aus gleichzeitigen gegenseitigen Zenitdistanzmessungen ermittelt. Auf diesem Wege, den wir empirisch nennen können, hat man folgende Werte gefunden<sup>1)</sup>:

Landestriangulation, über Land . . . . .	$k = 0,12$
Struve . . . . .	$k = 0,12$
Baeyer, über Land . . . . .	$k = 0,12$
Caraboeuf . . . . .	$k = 0,13$
Landestriangulation nahe der Küste . . . . .	$k = 0,13$
Gauss . . . . .	$k = 0,13$
Dépôt de la Guerre . . . . .	$k = 0,13$
Baeyer, nahe der Küste . . . . .	$k = 0,14$
Ostpreußische Gradmessung . . . . .	$k = 0,14$
Danmark-Expedition, über Land . . . . .	$k = 0,16$
Delambre . . . . .	$k = 0,17$
Baeyer, über Wasser . . . . .	$k = 0,18$
Danmark-Expedition {	$k = 0,52$
über Wasser . . . . .	
über Wasser zum Meeres- horizont . . . . .	$k = 0,58$

Wie stark  $k$  variieren kann, zeigt die folgende Zusammenstellung kleinster und größter Werte: Max. Min.

	Max.	Min.
Delambre	+ 0,60	- 0,01
Ostpreußische Gradmessung	+ 0,15	+ 0,13
Nivellement Swinemünde-Berlin	+ 0,27	+ 0,08
Küstenvermessung	+ 0,39	+ 0,10
Landestriangulation	+ 0,17	+ 0,06
Gauss	+ 1,21	- 0,11
Danmark-Expedition	{ über Land + 0,36 „ Wasser   + 1,72 „ Wasser zum Meereshorizont + 1,22	+ 0,02 + 0,25 + 0,17

1) Nach I. P. Koch, Survey of Northeast Greenland, Danmarks-  
Ekspeditionen til Grönlands Nordøstkyst 1906—1908. Bd. VI. Nr. 2  
(Meddelelser om Grönland, Bd. XLVI), København 1916. p. 164.

Die Werte schwanken also zwischen  $-0,11$  (einem nach oben konkaven Strahl entsprechend) und  $+1,7$ , während etwa  $1,15$  dem Mittelwerte aus den geodätischen Messungen entspricht. Es ist hieraus ersichtlich, daß man bei bloßer Schätzung von  $k$  große Fehler begehen kann, und daß man womöglich versuchen muß, diesen Faktor aus Temperaturbeobachtungen zu ermitteln. Ist man genötigt, ohne derartige Anhaltspunkte seine Wahl zu treffen, so wird man jedenfalls einen Wert benutzen müssen, der wesentlich höher ist, als der eben genannte Mittelwert aus den geodätischen Messungen, da bei den letzteren sorgfältig diejenigen Tage ausgeschlossen sind, bei denen die Refraktion infolge von Inversionen abnorm war. Man kann in unserer Tabelle sehr leicht diese Beobachtungsreihen von solchen unterscheiden, bei welchen der Refraktionskoeffizient nicht nur als Nebenresultat abgeleitet wurde, sondern welche gerade zur Bestimmung desselben unternommen wurden. Da bei diesen auch die abnormen Zustände berücksichtigt sind, so fällt der Wert für  $k$  hier erheblich höher aus. Ganz besonders ist dies der Fall bei den Beobachtungen der Danmark-Expedition, auf welcher gerade auch recht häufig Luftspiegelungen wahrgenommen wurden. Man wird hiernach Werte zwischen  $k = 0,2$  und  $k = 0,5$  annehmen dürfen, wenn keine Anhaltspunkte für eine andere Wahl vorliegen.

Ist das Temperaturgefälle innerhalb der unteren Schicht etwa durch Drachenaufstiege bekannt, so läßt sich der Refraktionskoeffizient durch eine Rechnung, die wir, im Gegensatz zu seiner Ableitung aus geodätischen Messungen, als eine theoretische bezeichnen können, in folgender Weise ermitteln. Wir benutzen eine aus der Geodäsie bekannte Formel, ohne hier auf ihre Ableitung einzugehen<sup>1)</sup>:

$$k = 0,000293 \frac{p}{760} \cdot \frac{273}{T} \cdot \frac{g}{G} \cdot R \cdot F,$$

$$\text{wo } F = \frac{\tau}{T} + \frac{1 - \frac{3e}{8p}}{7993} \cdot \frac{273}{T} \cdot \frac{g}{G}$$

$$\text{und } \frac{g}{G} = 1 - 0,00265 \cos 2\varphi - \frac{2k}{R}.$$

1) Fr. H. Helmert, Die mathematischen und physikalischen Theorien der höheren Geodäsie. II. Teil. p. 577. Nach I. P. Koch.

Hierin bedeutet  $p$  den Druck in Millimetern,  $g/G$  das Verhältnis der örtlichen Schwere zu derjenigen in  $45^\circ$  Breite am Meeresspiegel,  $R$  den Krümmungsradius des Ellipsoids,  $\tau$  das Temperaturgefälle pro Meter,  $e$  den Dampfdruck,  $\varphi$  die geographische Breite und  $h$  die Höhe über dem Meere.

Für die roheren Zwecke unserer Rechnungen läßt sich diese Gleichung ganz erheblich vereinfachen. Wir setzen  $\frac{g}{G} = 1$ , vernachlässigen  $\frac{3e}{8p}$  und betrachten  $R$  als Erdradius gleich 6370 km. Damit wird die Gleichung

$$(3) \quad k = 670,4 \frac{p}{T^4} (\tau + 0,0342).$$

Wenn wir zur weiteren Vereinfachung noch ein für alle Mal  $p = 750$  und  $T = 273$  setzen, so wird

$$(3a) \quad k = 6,75 (\tau + 0,034).$$

Hiermit erhält man z. B. folgende Zahlenwerte für  $k$ :

Temp.-Gefälle pro 100 m	- 3,4°	- 1,0°	- 0,5°	0,0°	+ 6,9°	+ 11,4°
$k =$	0	0,16	0,20	0,23	0,50	1,00

Nach dieser Vorbereitung sollen nunmehr die Gleichungen für die Spiegelung nach oben abgeleitet werden.

Um zu entscheiden, ob eine Schichtgrenze von gegebener Höhe über dem Beobachter und von gegebenen Temperaturverhältnissen eine Luftsiegelung erzeugen kann, berechnen wir aus Gleichung (1) den Einfallswinkel  $\alpha_0$  des horizontalen Strahles, indem wir  $h = 0$  setzen:

$$(1 + \varepsilon) \sin \alpha_0 = 1 + \frac{k}{2} (2\varepsilon + \varepsilon^2),$$

$$\sin \alpha_0 = \frac{1}{1 + \varepsilon} + \frac{k}{2} \cdot \frac{2\varepsilon + \varepsilon^2}{1 + \varepsilon}.$$

Soweit ist die Formel streng. Wir betrachten nun  $\varepsilon$  als kleine Größe und setzen also  $\varepsilon^2 = 0$  und

$$\frac{1}{1 + \varepsilon} = 1 - \varepsilon$$

und erhalten:

$$\sin \alpha_0 = 1 - \varepsilon (1 - k).$$

Nun lautet die Bedingung für Totalreflexion

$$\sin \alpha_0 \geqq \frac{1}{n},$$

worin  $n$  der Brechungsquotient der Schichtgrenze, also gleich  $1 + \delta$  ist. Also

$$\sin \alpha_0 \geq \frac{1}{1 + \delta}.$$

Zusammen mit der vorigen Gleichung ergibt dies

$$1 - \varepsilon(1 - k) \geq \frac{1}{1 + \delta},$$

oder unter Rücksicht darauf, daß auch  $\delta$  eine kleine Größe ist:

$$1 - \varepsilon(1 - k) \geq 1 - \delta, \text{ und also}$$

$$(4) \quad \varepsilon(1 - k) \leq \delta.$$

Dies ist die Bedingungsgleichung für Luftspiegelung nach oben. Um einige Zahlenwerte zu geben, seien in der folgenden Tabelle für einige Werte von  $k$  und  $H$  diejenigen Werte von  $\delta$  zusammengestellt, welche mindestens erreicht sein müssen, wenn Luftspiegelung eintreten soll.

Minimalwerte für  $\delta \times 10^6$

$H$	50 m	100 m	150 m	200 m
$k = 0,2$	6,3	12,6	18,8	25,1
$k = 0,5$	3,9	7,8	11,8	15,7

Mit Rücksicht auf Gleichung (2a) kann der Inhalt dieser Tabelle offenbar näherungsweise gleich dem Inversionsbetrage an der Schichtgrenze gesetzt werden.

Wenn beide Seiten der Ungleichung (4) einander gleich sind, so besagt dies offenbar, daß nur für den horizontalen Strahl gerade noch Totalreflexion eintritt. Dies ist der Fall, wenn die Höhe  $H$  der Inversion gerade gleich ihrer Wirkungstiefe ist. Da

$$\varepsilon = \frac{H}{R},$$

ergibt sich so die *Wirkungstiefe* nach

$$(5) \quad W = R \frac{\delta}{1 - k}.$$

Eine Inversion um  $10^6$  ( $\delta = 10^{-5}$ ) wird also bei  $k = 0,2$  eine Wirkungstiefe von 80 m haben, bei  $k = 0,5$  eine solche von 190 m.

Um die *Breite des spiegelnden Streifens* zu erhalten, berechnen wir den Höhenwinkel  $h$  des Grenzstrahles für Total-

reflexion, indem wir in Gleichung (1) die Beziehung

$$\sin \alpha = \frac{1}{1 + \delta}$$

berücksichtigen:

$$\cos h_0 = \frac{1 + \delta}{1 + \delta} - \frac{k}{2} (2 \varepsilon + \varepsilon^2),$$

oder, wenn wir  $\delta$  und  $\varepsilon$  als kleine Größen betrachten:

$$\cos h_0 = 1 - \delta + \varepsilon (1 - k).$$

Da die Berechnung des kleinen Winkels  $h$  durch den Cosinus ungenau ausfällt, bilden wir hieraus den Sinus:

$$\sin h_0 = \sqrt{1 - \cos^2 h_0} = \sqrt{2 \delta - 2 \varepsilon (1 - k)},$$

oder in Minuten:

$$h_0' = \frac{\sqrt{2}}{\sin 1'} \sqrt{\delta - \varepsilon (1 - k)}.$$

Die Breite  $b$  des spiegelnden Streifens ist gleich dem doppelten Betrag, also

$$(6) \quad b' = 9700 \sqrt{\delta - \varepsilon (1 - k)};$$

z. B. erhält man für  $H = 50$  m und  $\delta = 10^{-5}$  die Breite  $4,2'$ , wenn  $k = 0,2$  ist, oder  $24,0'$ , wenn  $k = 0,5$  ist.

Die *Entfernung des Objekts* vom Beobachter kann, wie bereits Fig. 3 lehrt, stark variieren. Wir können aber einen Begriff davon erhalten, wenn wir uns die Entfernung berechnen, in welcher ein beliebiger, vom Beobachter ausgehender Strahl die Schichtgrenze trifft. Wählen wir dann den Strahl so, daß er der oberen Grenze des spiegelnden Streifens entspricht

$$\left( \sin \alpha = \frac{1}{n} \right),$$

so haben wir die Entfernung des nächstgelegenen Reflexionspunktes überhaupt; setzen wir statt dessen  $h = 0$ , so haben wir die Entfernung des Reflexionspunktes des horizontalen Strahles. Die Objekte müssen jedenfalls jenseits der so gefundenen Abstände liegen.

Wir greifen zurück auf Fig. 1 und führen die Bezeichnung ein:  $x = \cancel{B}MP$  und  $y = \cancel{B}OP$ . Ferner denken wir uns die Sehne  $BP$  gezogen, welche mit den Tangenten in  $B$  und  $P$  den Winkel  $y/2$  bildet, so daß die Zenitdistanz dieser Sehne in  $B$  gleich

$$90 - h + \frac{y}{2}$$

und der Winkel bei  $P$  zwischen der Sehne und dem Radius  $MP$  gleich

$$\alpha - \frac{y}{2}$$

wird. Dann ist der Außenwinkel  $ZBP$  des Dreiecks  $MBP$ :

$$90 - h + \frac{y}{2} = x + \alpha - \frac{y}{2},$$

oder

$$(90 - a) - h = x - y.$$

Bezeichnet  $D$  die gesuchte Entfernung  $BP$  in Kilometern, so können wir genähert sowohl

$$\sin x = \frac{D}{R} \quad \text{als} \quad \sin y = \frac{D}{R} \cdot k$$

und also  $y = kx$  setzen, so daß wird:  $(90 - a) - h = x(1 - k)$ . Da alle drei Winkel  $(90 - a)$ ,  $h$  und  $x$  klein sind, kann man schreiben:

$$\cos \alpha - \sin h = (1 - k) \sin x = (1 - k) \frac{D}{R},$$

so daß wird:

$$D = \frac{R}{1 - k} (\cos \alpha - \sin h).$$

Dies ist die allgemeine Gleichung, die für einen beliebigen Strahl gilt. Spezialisieren wir sie für die obere Grenze des spiegelnden Streifens, so haben wir hinzuzunehmen die Gleichung

$$\sin \alpha = \frac{1}{1 + \delta},$$

woraus man leicht die genäherte Formel findet:  $\cos \alpha = \sqrt{2\delta}$ .

Ferner wird nach der allgemeinen Gleichung (1):

$$\cos h = (1 + \varepsilon) \sin a - k\varepsilon$$

oder für  $\sin \alpha = \frac{1}{1 + \delta}$ :

$$\cos h = 1 - \delta + \varepsilon(1 - k).$$

Hieraus findet man

$$\sin h = \sqrt{2\delta - 2\varepsilon(1 - k)}.$$

Setzen wir beide Werte ein, so folgt

$$(7) \quad D = \frac{R\sqrt{2}}{1 - k} [\sqrt{\delta} - \sqrt{\delta - \varepsilon(1 - k)}].$$

Diese Gleichung gestattet, die Entfernung des Reflexionspunktes des oberen Grenzstrahls des spiegelnden Streifens

zu finden. Z. B. wird sie für  $H = 50$  m und  $\delta = 10^{-5}$  gleich 14 km, wenn  $k = 0,2$  ist, und gleich 12 km, wenn  $k = 0,5$  ist.

Um andererseits den Reflexionspunkt des horizontalen Strahles zu finden, setzen wir in unserer allgemeinen Gleichung  $k = 0$  und drücken  $\alpha$  nach Gleichung (1) durch  $h$  aus:

$$\sin \alpha = \frac{\cos h + \varepsilon k}{1 + \varepsilon} = (1 + \varepsilon k)(1 - \varepsilon) = 1 - \varepsilon(1 - k).$$

Hieraus findet man

$$\cos \alpha = \sqrt{2\varepsilon(1 - k)},$$

so daß wird

$$(8) \quad D = R \sqrt{\frac{2\varepsilon}{1 - k}}.$$

In diesem Falle ist  $D$  natürlich unabhängig vom Brechungsquotienten der Schichtgrenze. Für  $H = 50$  m erhalten wir nach dieser Gleichung  $D = 28$  km, wenn  $k = 0,2$ , oder 36 km, wenn  $k = 0,5$  ist.

## 2. Spiegelung nach unten.

Die Spiegelung nach unten verlangt ein umgekehrtes Dichtegefälle in der Luft, so daß die leichte Luft unten, die schwere oben liegt. Da diese Schichtung nicht stabil ist, so kann sie längere Zeit nur unmittelbar über dem Boden bestehen, wo sie zwar auch unausgesetzt durch vertikalen Luftaustausch zerstört, aber gleichzeitig durch Wärmezufuhr vom Boden her immer wieder erneuert wird. Es herrscht dann als stationärer Zustand im untersten Höhenmeter oder Halbmeter eine Abnahme der Temperatur nach oben von ca.  $1-5^{\circ}$ . Die Bedingung hierzu ist offenbar, daß der Boden wärmer ist als die Luft, was besonders über sonnenbestrahlten Wüsten, im Polargebiete auch über dem herbstlichen Neueis und sehr häufig auch auf See zutrifft. Es ist also klar, daß hier nicht eine scharfe Schichtgrenze wirksam ist, sondern daß das Dichtegefälle hier in der untersten Luftsicht stetig verläuft. Bei der Spiegelung nach unten läßt sich also der Ansatz der alten Theorie eher rechtfertigen als bei der nach oben, indessen bleibt auch hier die Vernachlässigung der Erdkrümmung durchaus unzulässig. Es wäre also, streng genommen, nötig, die alte Theorie unter Berücksichtigung der Erdkrümmung zu verbessern. Es ist aber wenig wahrscheinlich,

daß sich bei dieser Komplikation der Aufgabe ein Resultat erzielen läßt, welches eine bequeme Vergleichung von Theorie und Beobachtung ermöglicht.

Da sich aber der intensive Luftaustausch vom Boden her nur in einer sehr dünnen Schicht geltend macht, die nur selten mehr als 1 m dick zu sein pflegt, und oft noch unter dieser Größe bleibt, so werden wir jedenfalls eine für die meisten Fälle sehr brauchbare Annäherung erhalten, wenn wir auch hier eine scharfe Schichtgrenze annehmen, die mit dem Erdboden zusammenfällt. Die Ungenauigkeit, die man damit begeht, ist so gering, daß sie reichlich durch den Vorteil aufgewogen wird, Gleichungen zu erhalten, die eine bequeme Vergleichung mit den Beobachtungen ermöglichen.

Fig. 4 erläutert die wesentlichen Erscheinungen dieser Spiegelung. *B* ist der Beobachter; der flache Kreisbogen *BP*

sei der untere Grenzstrahl des spiegelnden Streifens. Der mit demselben Krümmungsradius gezeichnete Kreisbogen *BC*, der bei *C* die Erdoberfläche tangiert, stellt die Sicht nach der Kimm und also zugleich die obere Begrenzung des spiegelnden Streifens dar. Die Breite des spiegelnden Streifens ist also der Winkel

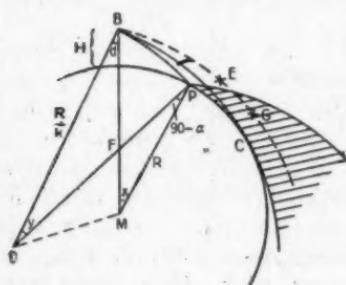


Fig. 4.

zwischen den Kreisbögen *BP* und *BC* bei *B*. Bei der Spiegelung nach unten liegt, wie man sieht, der spiegelnde Streifen nicht im astronomischen Horizont, sondern erstreckt sich von der Kimm abwärts. Ferner ist klar, daß hier gar keine andere Bedingung für das Auftreten der Spiegelung besteht, als daß überhaupt ein Temperatursprung vorhanden ist. Jeder noch so kleine Temperatursprung erzeugt bereits eine Spiegelung, gleichgültig, in welcher Höhe sich der Beobachter befindet. Hierin liegt die Erklärung für die Tatsache, daß Spiegelungen nach unten so viel häufiger zur Beobachtung gelangen als solche nach oben. Da die Schichtgrenze als konvexer Spiegel wirkt, ist auch einleuchtend, daß das Spiegelbild in vertikaler Richtung etwas geschrumpft

erscheinen muß, im Gegensatze zur Spiegelung nach oben, bei welcher das gespiegelte Bild stets mehr oder weniger in der Vertikalen gezerrt ist.

Man sieht leicht, daß alle Gegenstände, die sich in dem schraffierten Raume der Fig. 4 befinden, gespiegelt werden. Zwei Berge, deren Gipfel z. B. in  $E$  und  $G$  liegen, also von  $B$  aus in derselben Höhe erscheinen, verhalten sich verschieden, indem von dem näher gelegenen nur der untere Teil, der entfernter aber ganz gespiegelt wird. Diese Verhältnisse werden durch Fig. 5 erläutert.



Fig. 5.

Um die Gleichungen der Luftspiegelung nach unten zu berechnen, fassen wir zunächst den Strahl  $BP$  in der Fig. 4 als einen beliebigen auf und leiten die Gleichungen für den Depressionswinkel  $d$  und die Länge  $D$  desselben ab. Indem wir diese Gleichungen sodann einerseits für die untere, andererseits für die obere Grenze des spiegelnden Streifens spezialisieren, erhalten wir alle Elemente der Spiegelung.

Wenn  $\alpha$  der Einfallswinkel des Strahles an der Schichtgrenze ist, so ist offenbar  $\angle OPM = 90 - \alpha$ . Ferner ist  $\angle OBM = d$ . Wir wenden auf die gemeinsame Seite  $OM$  der beiden Dreiecke  $OBM$  und  $OPM$  den Cosinussatz an und erhalten:

$$\left(\frac{R}{k}\right)^2 + (R + H)^2 - \frac{2R}{k}(R + H) \cos d = \left(\frac{R}{k}\right)^2 + R^2 - \frac{2R^2}{k} \sin \alpha,$$

oder  $\cos d = \frac{k}{2} \left( \frac{R + H}{R} - \frac{R}{R + H} \right) + \frac{R}{R + H} \sin \alpha;$

setzen wir wieder

$$\frac{H}{R} = \varepsilon, \text{ so wird: } \cos d = \frac{k}{2} \left( 1 + \varepsilon - \frac{1}{1 + \varepsilon} \right) + \frac{\sin \alpha}{1 + \varepsilon}.$$

Soweit ist die Formel streng. Behandeln wir  $\varepsilon$  als kleine Größe, so können wir genähert schreiben:

$$(9) \quad \cos d = k\varepsilon + (1 - \varepsilon) \sin \alpha.$$

Damit haben wir die allgemeine Gleichung für  $d$ . Wir leiten gleich auch diejenige für  $D$  ab:  $\neq BFP$  ist offenbar einerseits gleich  $x + (90 - a)$  und andererseits gleich  $y + d$ , also:

$$d - (90 - a) = x - y.$$

Nun können wir, wie schon früher, genähert schreiben:

$$\sin x = \frac{D}{R} \quad \text{und} \quad \sin y = \frac{D}{R} \cdot k$$

und also

$$y = k \cdot x,$$

da  $x$  und  $y$  kleine Winkel sind. Damit erhalten wir

$$d - (90 - a) = x(1 - k).$$

Da auch  $d$  und  $(90 - a)$  kleine Winkel sind, können wir statt dessen schreiben

$$\sin d - \cos a = (1 - k) \sin x = (1 - k) \frac{D}{R},$$

oder

$$(10) \quad D = \frac{R}{1 - k} (\sin d - \cos a).$$

Damit haben wir auch die allgemeine Gleichung für die Entfernung des Reflexionspunktes.

Wir spezialisieren nun (9) und (10) zunächst für die *untere Grenze* des spiegelnden Streifens, indem wir

$$\sin a = \frac{1}{n} = \frac{1}{1 + \delta}$$

setzen, oder da  $\delta$  klein ist,

$$\sin a = 1 - \delta.$$

Damit erhalten wir aus Gleichung (9):

$$\cos d_u = 1 - \delta - \epsilon(1 - k)$$

oder, da  $d_u$  als kleiner Winkel besser aus dem Sinus berechnet wird:

$$\sin d_u = \sqrt{2\delta + 2\epsilon(1 - k)},$$

oder in Minuten

$$(11) \quad d_u' = \frac{\sqrt{2}}{\sin 1^\circ} \sqrt{\delta + \epsilon(1 - k)}.$$

Führen wir die gleiche Spezialisierung in (10) ein, indem wir  $\cos a = \sqrt{2\delta}$  setzen, so wird

$$D_u = \frac{R}{1 - k} (\sin d_u - \sqrt{2\delta}),$$

oder, wenn wir für  $\sin d_u$  seinen Wert einführen:

$$(12) \quad D_u = \frac{R\sqrt{2}}{1-k} (\sqrt{\delta + \varepsilon(1-k)} - \sqrt{\delta}).$$

Nunmehr spezialisieren wir (9) und (10) andererseits für die *obere Grenze* des spiegelnden Streifens, d. h. für den nach der Kimm gerichteten Strahl, indem wir  $\sin a = 1$  bzw.  $\cos a = 0$  setzen, und erhalten

$$\cos d_0 = 1 - \varepsilon(1-k)$$

oder

$$\sin d_0 = \sqrt{2\varepsilon(1-k)},$$

oder in Minuten

$$(13) \quad d_0' = \frac{\sqrt{2}}{\sin 1^\circ} \sqrt{\varepsilon(1-k)}.$$

Und für die Entfernung

$$D_0 = \frac{R}{1-k} \sin d_0,$$

oder, wenn wir für  $\sin d_0$  seinen Wert einsetzen

$$(14) \quad D_0 = R \sqrt{\frac{2\varepsilon}{1-k}}.$$

Die Gleichungen (11) bis (14) gestatten, alle wichtigen Elemente der Spiegelung aus dem Temperatursprung, der Höhe des Beobachters und dem Refraktionskoeffizienten zu berechnen. Insbesondere ist die Breite des spiegelnden Streifens gleich  $d_u - d_0$  und die kleinste Entfernung spiegelnder Objekte  $D_u$ .

Wenn über den Refraktionskoeffizienten  $k$  keine Anhaltpunkte vorliegen, so wird man ihn bei Spiegelung nach unten etwa gleich dem Mittel aus den geodätischen Werten, d. h. ca. 0,15 wählen. Mit diesem Werte geben unsere Gleichungen für eine Höhe des Beobachters von 10 m (dem Verdeck eines Schiffes entsprechend) und für einen Temperatursprung von  $5^\circ$  ( $\delta = 0,000005$ ) das Resultat  $d_u = 12,2'$ ,  $d_0 = 5,6'$ , also eine Breite des spiegelnden Streifens von 6,6', ferner  $D_u = 8,0$  km und  $D_0 = 12,2$  km.

### 3. Zerrbilder der Sonne (und des Mondes) im Horizont.

Die Zerrbilder und Spiegelungen der Sonne bei ihrem Auf- oder Untergang bilden das siderische Gegenstück der terrestrischen Luftspiegelungen und werden durch die gleichen

Ursachen hervorgerufen. Es leuchtet ohne weiteres ein, daß die Spiegelung nach unten für die Sonne in derselben Weise in Erscheinung treten muß wie für terrestrische Objekte, so daß wir diese hier nicht näher zu behandeln brauchen. Die Spiegelung nach oben muß sich bei der Sonne in der Weise geltend machen, daß sie die Sonnenscheibe teilt, indem nur oberhalb und unterhalb des spiegelnden Streifens überhaupt Licht von außen zum Beobachter gelangen kann. Der spiegelnde Streifen der terrestrischen Luftspiegelung wird hier also zu einem *blindem Streifen* im Sonnenbilde.

Qualitativ läßt sich das hierbei wirksame Gesetz ohne weiteres aus Fig. 6 ablesen. Wenn  $BAA'$  und  $BCC'$  die den blinden Streifen begrenzenden Grenzstrahlen der Totalreflexion sind, bei denen also die äußeren Strahlenteile gerade die Schichtgrenze in  $A$  und  $C$  tangential verlassen, so sind bei den benachbarten Strahlen  $BE$  und  $BD$  sowohl Einfallswinkel wie Austrittswinkel an der Schichtgrenze bereits kleiner geworden. Bei dem oberen Strahle ( $BEE'$ ) bewirkt nun diese Verkleinerung des Austrittswinkels eine *Hebung* des Astes  $EE'$ , sie wirkt daher in gleichem Sinne

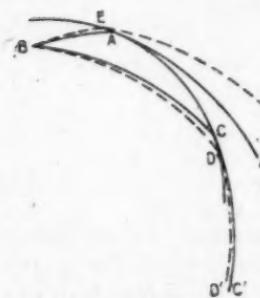


Fig. 6.

wie auch die *Hebung* des inneren Astes  $BE$ . Die beiden äußeren Äste  $EE'$  und  $AA'$  werden also stärker divergieren als die beiden inneren  $BE$  und  $BA$ . Mit anderen Worten: *Oberhalb des blinden Streifens herrscht Vertikalschrumpfung*. Anders bei den Strahlen unterhalb des spiegelnden Streifens. Denn hier wirkt die *Hebung* des äußeren Astes entgegen der *Senkung* des inneren Astes, so daß die äußeren Äste  $CC'$  und  $DD'$  jedenfalls weniger divergieren als die inneren  $BC$  und  $BD$ . *Es herrscht also unterhalb des blinden Streifens Vertikalzerrung*. Diese Vertikalzerrung lernten wir schon früher als Übergang zwischen aufrechtem und umgekehrtem Bilde kennen, und in der Tat ist dies auch hier der Fall, da, wie gezeigt werden wird, dicht unterhalb des blinden Streifens sich die benachbarten Strahlen infolge Überkompensation der Senkung schneiden und also ein umgekehrtes Bild geben. Wir wollen diese noch wenig

bekannte Erscheinung als *Nachspiegelung* bezeichnen, weil sie bei Sonnenuntergängen erst dann deutlich in Erscheinung tritt, wenn die Sonne bereits den blinden Streifen ganz passiert hat und sich von seinem Unterrande loslösen will, also zu einem Zeitpunkte, zu dem der Beobachter keine weitere Refraktionsstörung mehr erwartet. Wir werden auf diese interessante Erscheinung der Nachspiegelung weiter unten zurückkommen.

Unsere vorangehenden Ausführungen über die terrestrische Luftspiegelung nach oben geben uns auch die Mittel an die Hand, die quantitative Berechnung der Zerrbilder bei Sonnenuntergängen durchzuführen.

In Fig. 7, welche bis auf die Fortsetzung des Strahles außerhalb der Schichtgrenze identisch mit Fig. 1 ist, bedeutet wieder  $B$  den Beobachter und  $P$  einen Punkt der Schichtgrenze,  $M$  den Erdmittelpunkt und  $O$  den Krümmungsmittelpunkt des Strahles  $BP$ . Verfolgen wir den Lichtstrahl von  $B$  bis

außerhalb der Atmosphäre, so wird er bis  $P$  um den Winkel  $y$  gesenkt, in  $P$  um den Winkel  $\beta - \alpha$  und sodann noch um die astronomische Refraktion  $r$  weitergesenkt. Letztere kann aus Bessels Refraktionstafeln entnommen werden, wobei aber als scheinbare Höhe der Winkel  $90 - \beta = \zeta$  zu benutzen ist. Wir wollen deshalb diese Refraktion mit  $r_\zeta$  bezeichnen. Die Gesamtablenkung nach unten ist also

$$\Delta = y + \beta - \alpha + r_\zeta,$$

oder wenn wir statt  $\alpha$  und  $\beta$  ihre Komplemente  $\eta$  und  $\zeta$  einführen:

$$\Delta = y + \eta - \zeta + r_\zeta.$$

Bezeichnet  $h$  die scheinbare Höhe der Sonne beim Beobachter,  $h_\odot$  die astronomische Sonnenhöhe, so ist

$$h_\odot = h - \Delta,$$

oder

$$h_\odot = h - y - \eta + \zeta - r_\zeta.$$

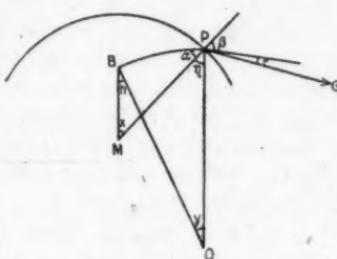


Fig. 7.

Aus der Figur läßt sich unmittelbar die Beziehung ablesen:  
 $y + \eta = x + h$ .

Benutzen wir die früher abgeleitete genäherte Beziehung

$$x = \frac{y}{k},$$

so wird hiernach

$$y \left(1 - \frac{1}{k}\right) = h - \eta.$$

Setzen wir diesen Wert von  $y$  in die Gleichung für  $h_{\odot}$  ein, so wird

$$(15) \quad h_{\odot} = \frac{h - \eta}{1 - k} + \zeta - r_{\zeta}.$$

Offenbar ist das Problem gelöst, wenn wir für jede Höhe  $h$  beim Beobachter die zugehörige astronomische Höhe angeben können. Wir müssen also der Reihe nach die drei Größen  $\eta$ ,  $\zeta$  und  $r_{\zeta}$  berechnen.

Zur Berechnung von  $\eta$  benutzen wir die allgemeine Gleichung (1), welche sich unter Berücksichtigung, daß  $\varepsilon (=H/R)$  eine kleine Größe ist, schreibt:

$$\cos \eta = \varepsilon k + (1 - \varepsilon) \cos h.$$

Da  $\cos \eta = 1 - 2 \sin^2 \frac{\eta}{2}$  und  $\cos h = 1 - 2 \sin^2 \frac{h}{2}$ ,

so wird

$$1 - 2 \sin^2 \frac{\eta}{2} = \varepsilon k + 1 - \varepsilon - 2(1 - \varepsilon) \sin^2 \frac{h}{2},$$

$$\text{oder} \quad \sin^2 \frac{\eta}{2} = (1 - \varepsilon) \sin^2 \frac{h}{2} + \frac{\varepsilon}{2}(1 - k).$$

Da  $\eta$  und  $h$  kleine Winkel sind, schreiben wir statt

$$\sin^2 \frac{\eta}{2} = \frac{\eta^2}{4} \sin^2 1',$$

wobei  $\eta$  in Minuten ausgedrückt ist, und ebenso statt

$$\sin^2 \frac{h}{2} = \frac{h^2}{4} \sin^2 1',$$

so daß wir erhalten

$$(16) \quad \eta^2 = (1 - \varepsilon) h^2 + \frac{2 \varepsilon (1 - k)}{\sin^2 1'}.$$

Wenn man nur auf Zehntelminute rechnet, kann man hierbei unbedenklich  $\varepsilon$  im ersten Gliede vernachlässigen, so daß wird

$$(16a) \quad \eta^2 = h^2 + \frac{2 \varepsilon (1 - k)}{\sin^2 1'}.$$

Diese Gleichung gestattet eine bequeme Berechnung des Winkels  $\eta$ .

Zur Berechnung von  $\zeta$  benutzen wir die Definitionsgleichung

$$\frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = 1 + \delta,$$

welche wir auch schreiben können

$$\cos \zeta = (1 + \delta) \cos \eta.$$

Wenden wir wieder auf beide Kosinusse den Satz

$$\cos \zeta = 1 - 2 \sin^2 \frac{\zeta}{2}$$

an, so wird

$$1 - 2 \sin^2 \frac{\zeta}{2} = (1 + \delta) - 2(1 + \delta) \sin^2 \frac{\eta}{2},$$

oder

$$\sin^2 \frac{\zeta}{2} = (1 + \delta) \sin^2 \frac{\eta}{2} - \frac{\delta}{2},$$

wofür wir wieder schreiben können

$$(17) \quad \zeta^2 = (1 + \delta) \eta^2 - \frac{2 \delta}{\sin^2 1'}$$

$\zeta$  und  $\eta$  sind hierin wieder in Minuten auszudrücken.

Rechnet man nur auf Zehntelminuten, so kann auch hier  $\delta$  im ersten Gliede vernachlässigt werden, so daß wird

$$(17a) \quad \zeta^2 = \eta^2 - \frac{2 \delta}{\sin^2 1'}.$$

Die *Refraktion*  $r_\zeta$  endlich entnehmen wir der Bessel-schen Tabelle, von der hier ein Auszug gegeben sei:

$\zeta$	0'	10'	20'	30'	40'	50'	60'
$r_\zeta$	84,90'	82,82'	80,87'	29,06'	27,38'	25,88'	24,41'

Wünscht man hierbei noch Druck und Temperatur zu berücksichtigen, so ist der Wert für  $r$  noch mit dem Faktor  $(1 - a - b)$  zu multiplizieren, wo  $a$  und  $b$  aus den folgenden beiden abgekürzten Tabellen entnommen werden können:

Luftdruck	720	780	740 mm	Temp.	-10°	0°	+10°	+20°
$a$	0,042	0,029	0,015	$b$	-0,078	-0,034	+0,002	+0,086

Als Druck und Temperatur müssen natürlich diejenigen dicht oberhalb der Schichtgrenze gewählt werden.

Man hat also die folgenden Gleichungen durchzurechnen, wenn man aus der Höhe der Inversion (oder ihrem Verhältnis  $\varepsilon$  zum Erdradius), dem Inversionsbetrag ( $\delta \times 10^6$ ) und dem Refraktionskoeffizienten  $k$  der unteren Schicht den Verlauf eines Sonnenuntergangs vollständig berechnen will:

$$(15)-(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} \eta^2 = h^2 + \frac{2s(1-k)}{\sin^2 1^\circ}, \\ \zeta^2 = \eta^2 - \frac{2\delta}{\sin^2 1^\circ}, \\ h_\odot = \frac{h - \eta}{1-k} + \zeta - r_\zeta. \end{array} \right.$$

An der Hand unserer Gleichungen läßt sich auch die Notwendigkeit der Nachspiegelung leicht erweisen. Differentieren wir die Gleichung für  $h_\odot$  nach  $h$ , so erhalten wir

$$\frac{\partial h_\odot}{\partial h} = \frac{1}{1-k} - \frac{\partial \eta}{\partial h} \cdot \frac{1}{1-k} + \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial h} - \frac{\partial r_\zeta}{\partial \zeta} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial h},$$

oder

$$\frac{\partial h_\odot}{\partial h} = \frac{1}{1-k} - \frac{\partial \eta}{\partial h} \cdot \frac{1}{1-k} + \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial h} \left( 1 - \frac{\partial r_\zeta}{\partial \zeta} \right).$$

$\partial r_\zeta / \partial \zeta$  können wir für kleine Winkel  $\zeta$  als konstant betrachten und aus der Besselschen Tabelle zu ca. — 0,2 entnehmen, so daß die Klammer gleich +1,2 wird.  $\partial \eta / \partial h$  ist endlich und negativ,  $\partial \zeta / \partial \eta$  aber ist für  $\zeta = 0$  gleich  $+\infty$ . Dies sieht man leicht, wenn man die Definitionsgleichung

$$\cos \zeta = (1 + \delta) \cos \eta$$

differentiiert:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial \eta} = (1 + \delta) \frac{\sin \eta}{\sin \zeta} = \frac{(1 + \delta) \sin \eta}{0}.$$

Infolgedessen wird auch

$$\frac{\partial h_\odot}{\partial h} = -\infty \text{ für } \zeta = 0,$$

d. h. für die untere Grenze des blinden Streifens, oder mit anderen Worten: In unmittelbarer Nachbarschaft des blinden Streifens wird trotz der Senkung des Strahles beim Beobachter der außerhalb der Atmosphäre liegende Ast gehoben und kommt also zum Schnitt nicht nur mit dem Grenzstrahl selbst, sondern auch mit dem späteren bei fortschreitender Senkung, bei denen dann auch außerhalb der Atmosphäre die Senkung wieder überwiegt. Man kann

ohne Schwierigkeit die Differentialquotienten  $\partial\eta/\partial h$  und  $\partial\zeta/\partial\eta$  bilden und durch Nullsetzen von  $\partial h_{\odot}/\partial h$  die Gleichung desjenigen Höhenwinkels  $h$  beim Beobachter berechnen, bis zu welchem die Umkehrung des Bildes herabreicht. Man erhält so die Gleichung für die untere Grenze der Nachspiegelung

$$(18) \quad \frac{1}{h} = \frac{1}{\eta} - \frac{A}{\zeta},$$

wo die Konstante

$$A = \left(1 - \frac{\partial r_{\zeta}}{\partial \zeta}\right)(1 - k) \text{ ist.}$$

Wenn man hieraus mit Hilfe der ersten beiden Gleichungen des Systems (15) — (17)  $\eta$  und  $\zeta$  eliminiert, erhält man den gesuchten Höhenwinkel  $h$  für die untere Grenze der Nachspiegelung. Es ist mir indessen bisher nicht gelungen, die Elimination in einer Weise auszuführen, welche eine für die praktische Rechnung brauchbare Formel liefert.

Die Berechnung eines Sonnenuntergangs möge an einem Beispiel erläutert werden. Gegeben sei die Höhe der Schichtgrenze zu 50 m ( $H = 0,05$  km) ferner der Inversionsbetrag zu  $7^{\circ}$  ( $\delta = 0,000007$ ) und der Refraktionskoeffizient der unteren Schicht  $k = 0,2$ . Der Erdradius wird zu 6370 km angenommen.

Zunächst berechnen wir zur Orientierung die Breite des blinden Streifens nach Gleichung (6). Sie ergibt sich zu  $8,28'$ . Die Grenzstrahlen liegen also bei  $h = +4,14'$  und bei  $h = -4,14'$ . Da in der Nähe des blinden Streifens die Verzerrung am größten ist, werden wir  $h_{\odot}$  für folgende Wertreihe von  $h$  berechnen:  $h = \pm 4,14', \pm 4,2', \pm 5,0', \pm 6,0', \pm 8,0', \pm 10,0', \pm 15,0'$ . Zunächst ergeben sich die konstanten Glieder von  $\eta^2$  und  $\zeta^2$  zu

$$\frac{2s(1-k)}{\sin^2 1'} = 148,42$$

und

$$\frac{2\delta}{\sin^2 1'} = 165,45.$$

Damit finden wir folgende Werte ( $r_{\zeta}$  aus der oben stehenden Refraktionstabelle):

$h$	$\pm 4,14'$	$\pm 4,2'$	$\pm 5,0'$	$\pm 6,0'$	$\pm 8,0'$	$\pm 10,0'$	$\pm 15,0'$
$\eta$	12,9'	12,9'	13,2'	13,6'	14,6'	15,8'	19,8'
$\zeta$	0,0'	0,8'	2,8'	4,4'	6,8'	9,1'	14,4'
$r_{\zeta}$	34,9'	34,8'	34,3'	34,0'	33,4'	33,0'	31,9'

und hieraus

$h$	- 15,0'	- 10,0'	- 8,0'	- 6,0'	- 5,0'	- 4,2'	- 4,14'
$h_{\odot}$	- 60,4'	- 56,1'	- 54,7'	- 54,1'	- 54,2'	- 55,3'	- 56,1'
$h$	+ 4,14'	+ 4,2'	+ 5,0'	+ 6,0'	+ 8,0'	+ 10,0'	+ 15,0'
$h_{\odot}$	- 45,9'	- 44,8'	- 41,7'	- 39,1'	- 34,7'	- 31,1'	- 22,9'

Mit Hilfe dieser Tabelle läßt sich der Verlauf des Sonnenunterganges sehr einfach graphisch konstruieren, indem wir in zwei Figuren mit Minutenkalen — die eine für  $h_{\odot}$  und die

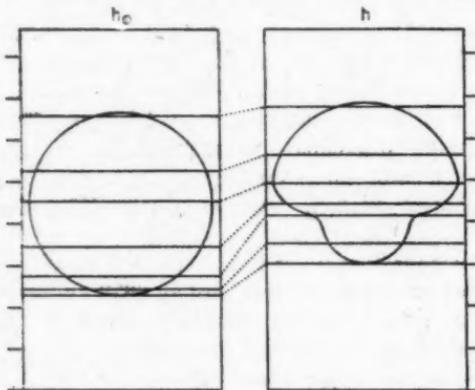
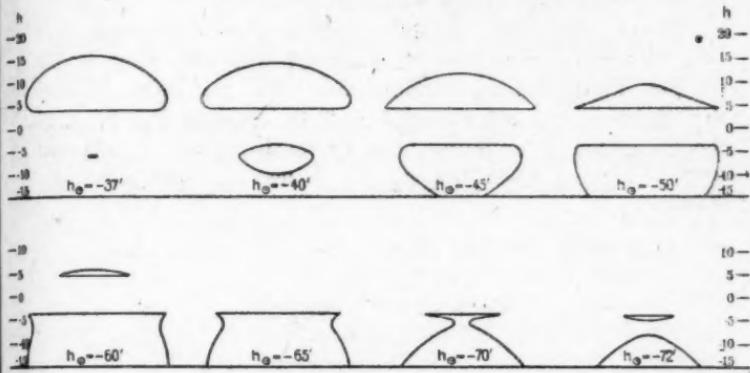


Fig. 8.

andere für  $h$  — diejenigen horizontalen Minutenlinien hervorheben, welche den berechneten zusammengehörigen Wertepaaren unserer Zahlentabelle entsprechen. Zeichnet man dann in der Figur für  $h_{\odot}$  die Sonnenscheibe als Kreis vom Radius 16' in beliebiger Höhe, so lassen sich, wie Fig. 8 schematisch zeigt, alle Schnitte mit den hervorgehobenen Linien unmittelbar mit dem Zirkel in die Figur für  $h$  übertragen und die vollständigen Konturen des Zerrbildes dann leicht ergänzen.

In dieser Weise sind die in Fig. 9 dargestellten Zerrbilder für die oben angegebenen Zahlenwerte erhalten. Die Bilder zeigen deutlich die Schrumpfung oberhalb und die Zerrung unterhalb des blinden Streifens. Auch ist die Nachspiegelung besonders auf den letzten beiden Figuren deutlich zu erkennen. Sie äußert sich aber auch schon in der zweiten Figur dadurch,

daß die untere Bildhälfte nicht am Unterrande des blinden Streifens, sondern in derjenigen Höhe zu erscheinen beginnt, welche der unteren Grenze der Nachspiegelung, also der

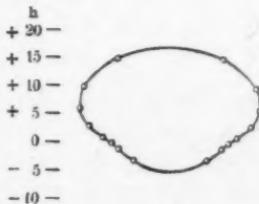


Verlauf des Sonnenuntergangs bei einer Inversion um  $7^{\circ}$  in 50 m Höhe über dem Beobachter, wenn  $k = 0,2$  ist.  $h_{\odot}$  gilt für den Sonnenmittelpunkt.

Fig. 9.

Grenze zwischen umgekehrtem und aufrechtem Bilde entspricht. Die Nachspiegelung reicht in unserem Falle etwa von  $h = -4',14$  bis  $h = -6'$ .

Es sei nur kurz erwähnt, daß auch solche Inversionen, welche keine terrestrischen Luftsiegelungen erzeugen können, doch noch eine Verzerrung der Sonnenscheibe ergeben. Der blinde Streifen fehlt dann allerdings; aber es tritt am horizontalen Strahle eine Unstetigkeit im Verlaufe der Refraktion auf, und zwar wieder in dem Sinne, daß oberhalb Schrumpfung, unterhalb Zerrung herrscht, beide mit dem Maximum am horizontalen Strahle selbst. Fig. 10 gibt das Konstruktionsergebnis für ein Zahlenbeispiel; sie ist mit denselben Zahlen wie das frühere Beispiel berechnet, nur mit  $\delta = 0,000006$  statt  $0,000007$ . Nach unserer früheren Tabelle



Verzerrung der Sonnenscheibe für eine Inversion von  $6,0^{\circ}$  in 50 m Höhe über dem Beobachter bei  $k = 0,2$ . Wahre Höhe des Sonnenmittelpunktes  $-35'$ .

Fig. 10.

wäre bei den gegebenen übrigen Bedingungen eine Inversion von  $6,8^{\circ}$  ( $\delta = 0,0000068$ ) nötig, um Luftspiegelung zu geben, daher muß hier der blinde Streifen fehlen. Auch die Nachspiegelung ist hier bereits verschwunden.

Wenn umgekehrt der blinde Streifen so breit wird, daß sein Unterrand unter der Kimm liegt und also nicht mehr gesehen werden kann, so beschränkt sich der ganze Verlauf der Erscheinung auf die oberen Teile unserer Fig. 8, d. h. die Sonne geht hier hinter einer unsichtbaren Wand, nämlich dem blinden Streifen, unter, in erheblicher Höhe über der Kimm.

Im Felde, im Juni 1918.

(Eingegangen 18. Juni 1918.)

**4. Zur Elektronentheorie der Thermoelektrizität;  
von G. Borelius.**

1. Die meisten Untersuchungen, die auf dem Grunde der Riecke-Drude-Lorentzschen Elektronentheorie stehen, machen für die Berechnung der thermoelektrischen Größen die vereinfachende Annahme, daß die atomaren Kraftfelder der Metalle starr und mit der Temperatur unveränderlich sind. Als Ursachen für die thermoelektrischen Effekte werden dann die Variationen der mittleren Energie der Elektronen, insofern sie von den Bewegungen der Elektronen selbst herrühren, und die Variationen der Zahl der freien Elektronen angegeben. Zwar ist besonders von Bohr<sup>1)</sup> allgemein darauf hingewiesen worden, daß auch die Variationen der Kraftfelder einen Einfluß auf die thermoelektrischen Größen haben müssen. Dieser Einfluß scheint jedoch nie näher berechnet zu sein. Wir wollen nun im folgenden die Ansicht zu begründen versuchen, daß die erstgenannten Einflüsse der Elektronenbewegungen im starren Kraftfelde wahrscheinlich nur einen kleinen, vermutlich einen verschwindenden Anteil zu den gemessenen Effekten liefern können, und daß diese Effekte wenigstens größtenteils die Veränderungen der atomaren Kraftfelder auf Grund der thermischen Ausdehnung und der Wärmebewegungen der Atome zuzuschreiben sind. Die Untersuchung wird uns dabei zu Ausdrücken führen, die an der Erfahrung geprüft werden können.

Es ist vorteilhaft, unsere Ausführungen an den Thomson-Effekt anzuknüpfen, und erst später die übrigen Effekte behandeln. Den Thomson-Effekt wollen wir positiv rechnen, wenn der Strom, von wärmeren zu kälteren Teilen eines Metalles fließend, eine Erwärmung hervorbringt.

2. Unter Voraussetzung, daß die Elektronen dieselbe mittlere kinetische Energie besitzen wie die Atome, daß die

1) N. Bohr, Diss. Kopenhagen 1911.

Kraftfelder der Atome wenig ausgedehnt sind, so daß getrennte Zusammenstöße der Elektronen mit den Atomen auftreten, und daß die Kraftfelder von der Temperatur unabhängig sind, leitet Lorentz<sup>1)</sup> für den Thomsons-Effekt den Ausdruck

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma = \frac{kT}{e} \frac{d \log n}{dT} - \frac{3}{2} \frac{k}{e} \\ \quad = 86 \left( T \frac{d \log n}{dT} - \frac{3}{2} \right) \frac{\text{Mikrovolt}}{\text{Grad}} \end{array} \right.$$

ab, wo  $k$  die Boltzmannsche Konstante,  $e$  die Elementarladung,  $n$  die Zahl der freien Elektronen pro Kubikzentimeter und  $T$  die absolute Temperatur ist. Dieser Ausdruck dürfte kaum mit der Erfahrung in Einklang gebracht werden können. Das konstante Glied ist viel größer als die bei den guten Leitern beobachteten Effekte. Der extrem hohe Wert für Konstantan ist z. B. nur  $-25$  der benutzten Einheiten. Um den erhaltenen Ausdruck mit der beobachteten Kleinheit von  $\sigma$  in Übereinstimmung zu bringen, wäre man, wie J. J. Thomson<sup>2)</sup> bemerkt hat, gezwungen, eine bestimmte, überall gleiche Temperaturabhängigkeit von  $n$  anzunehmen und in der Formel von Lorentz  $n$  proportional  $T^{3/2}$  zu setzen, wofür sonst kein Grund vorliegt.

Übrigens hat diese Theorie gar keine Möglichkeit, die Differenzen der Thomsons-Effekte in den verschiedenen Richtungen, z. B. des Wismutkristalles, zu erklären, während jedoch diese Differenzen von derselben Größenordnung wie die Effekte selbst sind. Und weiter versagt die Theorie, wie der Verfasser<sup>3)</sup> neulich bemerkt hat, für die Erklärung der bei den Mischkristallallegierungen auftretenden Gesetzmäßigkeiten.

Diese Mißerfolge können nun nicht durch das bloße Heranziehen neuer Glieder zu (1), die von der Veränderlichkeit der Kraftfelder herrühren, gehoben werden. Es scheint zuerst notwendig, die schon vorhandenen Glieder ganz oder größtenteils aus der Rechnung zu schaffen, was wohl nur durch modifizieren der Grundannahme über die gleiche Verteilung der Energie auf den Elektronen und den Atomen ge-

1) H. A. Lorentz, Proc. Akad. Amsterdam 7. p. 451. 1906.

2) J. J. Thomson, Körpuskulartheorie. p. 77. 1908.

3) G. Borelius, Ann. d. Phys. 53. p. 615. 1917.

schehen kann. Derselben Forderung begegnen wir, wie bekannt, auch in der Theorie der spezifischen Wärme, wo keine oder jedenfalls nur wenig Energie für die Elektronen übrig bleibt.

Es sind verschiedene Wege<sup>1)</sup> vorgeschlagen worden, um diesen Schwierigkeiten zu entgehen. Am tiefsten greift wohl die Annahme von Wien, daß die Elektronen durch einen Dissoziationsprozeß mit einer von der Temperatur unabhängigen Geschwindigkeit von den Atomen ausgeschleudert werden, in die bisherigen Vorstellungen hinein. Vielleicht ist es doch nicht notwendig, so weit zu gehen. Es scheint sehr möglich zu sein, daß die Quantentheorie auch ohne die ungleichmäßige Energieverteilung zwischen Atome und Elektronen erklären kann. Wenn auch die Vorstellungen auf diesem Gebiete noch nicht hinreichend ausgeformt sind, damit wir uns ein vollständiges Bild des Mechanismus machen können, so können wir jedoch an einem Beispiel zeigen, wie die Quantentheorie mit der Hypothese der gleichen Energieverteilung in Widerspruch geraten kann.

Sind, was wohl das Wahrscheinlichste ist, die Kraftfelder der Atome ziemlich ausgedehnt, so daß die abstoßenden Kräfte auf den Elektronen noch verhältnismäßig weit von den Atomen bemerkbar sind, müssen wir die freien Weglängen der Elektronen, die in Übereinstimmung mit der älteren Theorie frei beweglich gedacht werden, von derselben Größenanordnung wie die Atomabstände oder etwa  $2 \cdot 10^{-8}$  cm annehmen. Nach der Äquipartitionstheorie finden wir die mittlere Geschwindigkeit  $v$  eines Elektrons gemäß der Gleichung

$$m v^2 = 3 k T$$

bei gewöhnlicher Temperatur, oder ca.  $300^\circ$  absolut, zu ca.  $10^7$  cm/sec. Das Elektron würde somit  $10^7 : 2 \cdot 10^{-8} = 0,5 \cdot 10^{15}$  mal in der Sekunde seine Richtung ändern und führt eine zwar nicht reine Schwingung von der mittleren Schwingungszahl  $\nu = 0,25 \cdot 10^{15}$  aus. Die charakteristische Temperatur dieser Schwingung würde

$$\beta \nu = 4,9 \cdot 10^{-11} \cdot 0,25 \cdot 10^{15} = 12500^\circ$$

1) J. J. Thomson, l. c. p. 84; Phil. Mag. 20. p. 192. 1915; J. Stark, Jahrb. d. Rad. 9. p. 188. 1912; W. Wien, Berl. Ber. 1913. p. 184; P. A. Lindemann, Phil. Mag. 29. p. 126. 1915 u. a.

sein, und eine solche Schwingung würde bei  $300^{\circ}$  außerordentlich unwahrscheinlich sein.

Diese Betrachtungsweise bewährt sich vielleicht auch für den Fall, daß die mittleren freien Weglängen größer sind als die Atomabstände. Man muß sich nämlich vorstellen, daß die Elektronen, wenn sie die Atomstraßen entlang fliegen, mit der eben berechneten Periode von den Atomkräften zurückgehalten oder beschleunigt werden.

Es ist somit durchaus wahrscheinlich, daß der Beitrag der Elektronenbewegungen zur Thomsonwärme viel kleiner ist als der durch (1) gegebene Ausdruck. Sehr möglich ist, daß dieser Beitrag sogar die Fehlerngrenze der heutigen Messungen nicht erreicht. Dies wäre der Fall, wenn die Zunahme der mittleren Energie der Elektronen kleiner als ca. 0,001 der mittleren Energie der Atome ist.

3. Wir gehen dann zu einer Berechnung der Anteile der Thomsonwärme über, die von den Änderungen der Kraftfelder herrühren. Zuerst haben wir uns dann über das allgemeine Aussehen der Kraftfelder zu orientieren. Wir machen wie die ältere Theorie die vereinfachende Annahme, daß die Kräfte der Elektronen aufeinander gegen die Kräfte zwischen Atomen und Elektronen zu versäumen sind.

Die einfachste Form der Potentialfunktion  $\varphi(x)$  der positiven Atomionen, die wir uns denken können, dürfte durch die Kurve der Fig. 1a gegeben sein.  $\varphi(x)$  wird einfach als die Arbeit definiert, die ausgeführt werden muß, um ein Elektron aus dem Abstande  $x$  in unendliche Ferne zu führen. Mit der Kurve übereinstimmend ist, daß das Elektron in großer Entfernung angezogen wird, im Abstande  $a$  eine Gleichgewichtslage findet und in unmittelbarer Nähe des Atomes stark abgestoßen wird.

Die gegenseitigen Lagen der Atome denken wir uns nun durch Kräfte elektrischer Natur und Gravitationskräfte bestimmt, worauf wir nicht näher eingehen können. Der Atomabstand sei  $2l$ . Ist nun  $a$  viel kleiner als  $l$  (Fig. 1b), erscheint das Elektron an dem Atom recht fest gebunden, wir haben ein Dielektrikum vor uns. Ist dagegen  $l$  kleiner als  $a$  (Fig. 1c), so werden die freien Elektronen von den Atomen überall abgestoßen und haben ihre Gleichgewichtslagen mitten zwischen den Atomen in den Punkten, wo die  $\Sigma\varphi$ -Kurven ihre Maxima

haben. Wir bekommen so ein einfaches Raumgitter aus Atomen und Elektronen und nehmen an, daß dieses Bild den Verhältnissen in einem Metalle entspricht. (Zu den Vor-

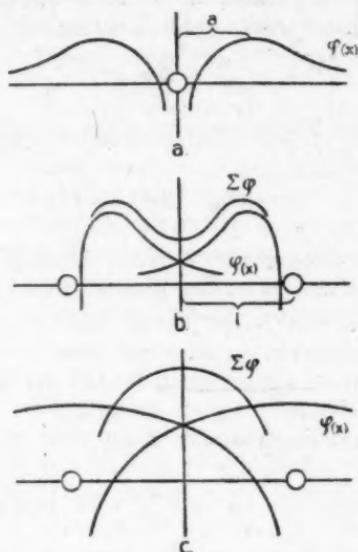


Fig. 1.

stellungen der gewöhnlichen Theorie würde man hiervon dadurch hinüberkommen, daß man das Maximum der  $\Sigma \varphi$ -Kurve sehr breit und bis in die unmittelbare Nähe des Atoms erstreckt annähme.)

Im folgenden wollen wir der Einfachheit halber die Werte der ersten und zweiten Ableitung von  $\varphi(x)$  nach  $x$  im Abstande  $l$  mit  $\varphi'$  bzw.  $\varphi''$  bezeichnen.

Der Einfluß der Temperaturerhöhung macht sich durch die thermische Ausdehnung und die Vergrößerung der Schwingungsamplitude der Atome bemerkbar. Die beiden Erscheinungen sind wohl miteinander innig verbunden, werden jedoch mit Vorteil jeder für sich behandelt.

4. Wir knüpfen an eine eindimensionale Betrachtung an und denken uns eine Reihe von positiven Atomionen und Elektronen abwechselnd und in gleichem Abstande voneinander.

Eine Temperatursteigerung um einen Grad vergrößert den halben Atomabstand  $l$  um  $\alpha l$ , wenn  $\alpha$  der Längenausdehnungskoeffizient ist. Damit folgt eine Vergrößerung der potentiellen Energie eines jeden Elektrons, die, wenn wir nur die Wirkung der beiden nächsten Atome mit in Rechnung nehmen, gleich

$$\frac{du_1}{dT} = 2 \varphi' \alpha l$$

ist. Dies gibt zur Thomsonwärme  $\sigma$  den mit unserem Zeichenregel positiven Anteil

$$\sigma_1 = \frac{2 \varphi' \alpha l}{\varepsilon}.$$

Da die Variationen von  $l$  immer klein sind, können wir  $\varphi'$  nahe konstant annehmen und finden somit  $\sigma_1$  proportional  $\alpha$ .

Wir können uns leicht davon überzeugen, daß  $\sigma_1$  die nötige Größe erreichen kann. Wir kennen zwar die Kraft  $\varphi'$  nicht, können sie aber vorteilhaft mit der nach dem Coulombschen Gesetze berechneten Abstoßung zweier Elektronenladungen, die sich im Abstande  $l$  befinden, vergleichen. Wir setzen

$$\varphi' = z \frac{\varepsilon^2}{l^2},$$

wo  $z$  ein Vergleichsfaktor ist, und bekommen

$$\sigma_1 = z \frac{2 \varepsilon \alpha}{l}.$$

Nehmen wir die Werte  $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-10}$  elektrostat. Einh.,  $\alpha = 10^{-5}$  und  $l = 10^{-8}$  cm an, so ergibt sich

$$\sigma_1 = z \cdot 10^{-6} \frac{\text{Erg}}{\text{E.S.E.}} = z \cdot 300 \frac{\text{Mikrovolt}}{\text{Grad}}.$$

$\sigma_1$  wird von der Größe der Thomsonwärme des Konstantanschens für  $z$  gleich ca. 0,1.

5. Um den Einfluß der Atomschwingungen approximativ zu berechnen, betrachten wir kleine Verlagerungen der Atome von ihren Gleichgewichtslagen um den mittleren Betrag  $\pm \delta$ . Die mittlere Änderung der potentiellen Energie eines Elektrons wird dann

$$\Delta u_3 = -2 \left[ \frac{\varphi(l + \delta) + \varphi(l - \delta)}{2} - \varphi(l) \right],$$

oder entwickelt nach  $\delta$  und mit der zweiten Derivate abgebrochen

$$\Delta u_2 = -2\varphi''\delta^2.$$

Die Thomsonwärme bekommt hierdurch den Anteil

$$\sigma_2 = \frac{1}{e} \frac{\Delta u_2}{\Delta T} = -\frac{2\varphi''}{e} \frac{d\delta^2}{dT}.$$

Da  $\delta^2$  proportional der atomaren Energie ist, wird somit  $\sigma_2$  angennähert proportional der Atomwärme ansteigen.

Auch hier wollen wir uns davon überzeugen, daß wir wirklich einen beträchtlichen Anteil zur Thomsonwärme erhalten können. Denken wir uns, daß die Atome unter Einwirkung einer Direktionskraft von der Größe  $2\varphi''$  schwingen (entsprechend der Kraft  $2\varphi''$  bei den Elektronen) und daß jeder Oszillatator bei höheren Temperaturen die mittlere Energie  $3kT$  hat, so gilt

$$\delta^2 = \frac{3kT}{2\varphi''}$$

und somit

$$\sigma_2 = \frac{3k}{2e} \cdot \frac{\varphi''}{\varphi''} = 130 \frac{\varphi''}{\varphi''} \frac{\text{Mikrovolt}}{\text{Grad}}.$$

Da die Elektronen leichter beweglich sind als die Atome, ist es zwar zu erwarten, daß  $\varphi''$  kleiner als  $\varphi''$  sein soll. Schon für  $\varphi'' = 0,2\varphi''$  erhalten wir aber einen hinreichend großen Wert von  $\sigma_2$ , um die Thomsonwärme des Konstantans zu erklären.

6. Wir können nach dem Gesagten den Thomsonkoeffizienten  $\sigma$  in der Form

$$(2) \quad \sigma = D a - E c + F$$

schreiben, wo  $a$  der Längenausdehnungskoeffizient,  $c$  die spezifische Wärme ist, und wo  $D$  und  $E$  positiv und nahe konstant sein dürften. Für die Funktion  $F$ , die von den unter 2. besprochenen Einflüssen der Elektronenbewegungen herührt, kennen wir sogar nicht die Größenordnung. Da sie vermutlich sehr klein ist, scheint es zunächst zweckmäßig, den Ausdruck (2) ohne  $F$  mit der Erfahrung zu vergleichen. Sowohl  $a$  wie  $c$  steigen, wie bekannt, im Temperaturgebiete unterhalb der charakteristischen Temperatur  $\Theta = \beta\nu$  ( $\beta = h/k = 4,9 \cdot 10^{-11}$ ,  $\nu$  charakteristische Frequenz aus spezifischer Wärme berechnet) sehr schnell an und nähern sich konstanten

Endwerten. Es ist daher vorteilhaft, neue Konstanten  $A$  und  $B$  einzuführen und unsere Theorie an der Gleichung

$$(3) \quad \sigma = A \frac{a}{a_\infty} - B \frac{c}{c_\infty}$$

mit der Erfahrung zu vergleichen, wobei zwar die Konstanten  $a_\infty$  und  $c_\infty$  einer näheren Definition bedürfen. Für die Prüfung eignet sich besonders auch die Temperaturabhängigkeit der Thomsonwärme

$$(4) \quad \frac{d\sigma}{dT} = A \frac{1}{a_\infty} \cdot \frac{da}{dT} - B \frac{1}{c_\infty} \frac{dc}{dT}.$$

Direkte Messungen der Thomsonwärme haben wir zurzeit im allgemeinen nur bei Temperaturen größer als  $\Theta$ . Für das interessante Gebiet unterhalb  $\Theta$  sind wir leider darauf angewiesen, Differenzen der Thomsonkoeffizienten zweier Metalle zu betrachten, die wir nach der Thomsoschen Gleichung

$$(5) \quad \sigma_1 - \sigma_2 = T \frac{d e_{12}}{dT}$$

aus der leichter zugänglichen Thermokraft pro Grad  $e_{12}$  ableiten. Es ist daraus klar, daß wir zurzeit nur eine qualitative Prüfung der Theorie durchführen können.

Nach einem Satze von Grüneisen soll  $a$  angenehmt proportional  $c$  anwachsen. Wäre diese Proportionalität vollständig, so würde  $\sigma$  gemäß (4) dieselbe Temperaturabhängigkeit zeigen wie die spezifische Wärme und ganz auf der positiven oder ganz auf der negativen Seite liegen, je nachdem  $A >$  oder  $< B$  ist. Nun ist jedoch die Proportionalität von  $a$  und  $c$ , wie sowohl die experimentellen Prüfungen<sup>1)</sup> als die Betrachtungen Grüneisens<sup>2)</sup> an die Hand geben, nur eine grobe Näherung. Die beobachteten Abweichungen sind in der Tat groß genug, um das allgemeine Aussehen der  $\sigma$ -Kurve beträchtlich komplizierter zu machen, besonders wenn  $A$  und  $B$  einigermaßen gleich groß sind. (Wenn die eine der Konstanten  $A$  oder  $B$  die andere ganz überwiegt, nähern wir uns natürlich Kurven der einfacheren  $c$ - oder  $a$ -Typen.)

Im Gebiete  $T > \Theta$  steigen  $c/c_\infty$  und  $a/a_\infty$  verhältnismäßig langsam. Sind die Zunahmen dieser Größen, wie die

1) Besonders die von S. Valentiner u. J. Wallot, Verh. d. D. Physik. Ges. 16, p. 757. 1914.

2) E. Grüneisen, Ann. d. Phys. 39, p. 257. 1912.

Größe selbst, ungefähr gleich groß, so müssen wir nach (3) und (4) gleiche Zeichen von  $\sigma$  und  $d\sigma/dT$  erwarten, positiv oder negativ, je nachdem  $A >$  oder  $< B$  ist. Erfahrungsgemäß scheint jedoch die relative Zunahme von  $a$  diejenige von  $c$  zu überwiegen, wonach bei  $d\sigma/dT$  eine Bevorzugung des positiven Zeichens zu erwarten ist. In Wirklichkeit ist nach Messungen von Lecher<sup>1)</sup>, Cermak<sup>2)</sup> und Berg<sup>3)</sup> sowohl  $\sigma$  als  $d\sigma/dT$  positiv bei Pb, Zn, Cd, Cu und Ag, negativ bei Sn, Al und Pt. Doch sind die positiven Temperaturkoeffizienten relativ größer als die negativen. (Es ist zu bemerken, daß die Messungen Lechers an Fe, das scheinbar eine Ausnahme bildet, wegen des großen  $\Theta$  dieses Metalles nicht in das Gebiet  $T > \Theta$  hineinragt.)

Die wenigen Metalle, deren Ausdehnung im Gebiete  $0,5\Theta < T < \Theta$  ausführlich untersucht worden sind, zeigen ein deutlich größeres Anwachsen von  $a/a_\infty$  als von  $c/c_\infty$ . Demgemäß müssen wir hier einen Gang der Kurve mit steigender Temperatur nach der positiven Seite hin erwarten.

Im darauffolgenden Gebiete  $0,1\Theta < T < 0,5\Theta$  steigt  $c/c_\infty$  sehr steil, nämlich von 0,076 auf 0,89 nach der Formel von Debye. Es ist daher zu erwarten, daß hier die Änderung dieser Größe überwiegen soll, um so mehr, als  $a/a_\infty$  schon oberhalb ca.  $0,5\Theta$  beträchtlich abgenommen hat. Zwischen  $0,1\Theta$  und  $0,5\Theta$  können wir also einen Gang nach der negativen Seite hin erwarten.

Über das gegenseitige Verhalten der betrachteten Temperaturkoeffizienten bei noch tieferen Temperaturen, d. h. für  $T < 0,1\Theta$ , können wir zurzeit gar nichts aussagen. In dem absoluten Nullpunkt muß  $\sigma$  verschwinden.

Zusammenfassend können wir für die  $\sigma$ -Kurve voraussagen, daß sie zwischen ca.  $0,1\Theta$  und  $\Theta$  durch eine Wellenlinie charakterisiert sein soll, die zuerst nach der negativen, sodann nach der positiven Seite abweicht. Diese Voraussagen finden eine sehr gute Bestätigung durch die Erfahrung. Durch graphisches Differenzieren der Thermokraftkurven, die G. Wietzel<sup>4)</sup> nach Messungen gegen Pb bis zu  $14^\circ$  abs.

---

- 1) E. Lecher, Ann. d. Phys. **19**, p. 853. 1906.
- 2) P. Cermak, Ann. d. Phys. **33**, p. 1195. 1910.
- 3) O. Berg, Ann. d. Phys. **32**, p. 477. 1910.
- 4) G. Wietzel, Ann. d. Phys. **48**, p. 618. 1914.

aufgezeichnet hat, finden wir in den gemäß (5) berechneten  $(\sigma_m - \sigma_{Pb})$ -Kurven bei allen untersuchten reinen Metallen, oder Cu, Ag, Au, Zn, Cd, Sn, Al, Fe, Co, Ni und Pt. Zwischen ca. 0,1 und 0,5  $\Theta$  den vorausgesagten charakteristischen Gang der Thomsonwärme nach der negativen Seite hin wieder. Aus den darauffolgenden Anstieg der Kurve im Gebiete

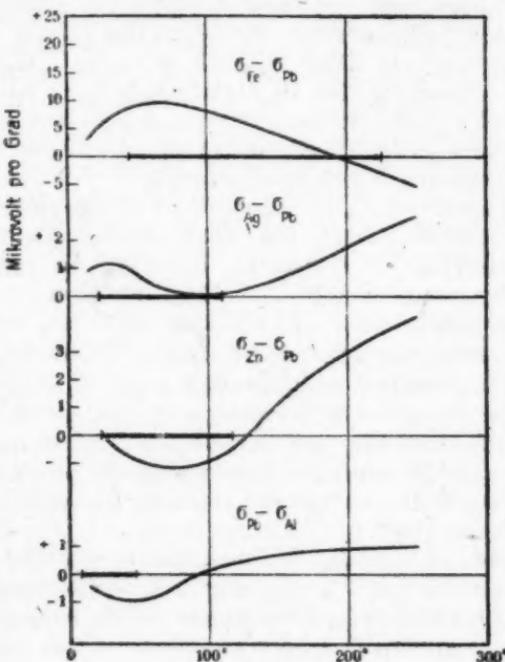


Fig. 2.

zwischen 0,5  $\Theta$  und  $\Theta$  tritt überall hervor, wo die Messungen in dieses Gebiet hineinragen. Eine besondere Kleinheit von  $\sigma$  sowie die tiefe Lage von  $\Theta$  ( $= 95^\circ$ ) beim Pb dürfte zu diesem Erfolge mitgewirkt haben. Der für das Pb charakteristische Gang der  $(\sigma_{Pb} - \sigma_m)$ -Kurven tritt nur bei Al und Pt deutlich und von anderen Einflüssen getrennt hervor.

In der Fig. 2 werden einige Beispiele der Kurven wieder-gegeben. Das Temperaturgebiet 0,1—0,5  $\Theta$  ist an der Ab-szissenachse markiert worden. Für Fe wissen wir nach Mes-

sungen von Lecher<sup>1)</sup>), daß die Kurve bei etwas höheren Temperaturen wieder steigen wird.

7. Sind die thermoelektrischen Erscheinungen, wie wir in der Gleichung (8) vorausgesetzt haben, in überwiegendem Maße durch die Veränderlichkeit der atomaren Kraftfelder bestimmt, so ist es deutlich, daß die thermoelektrischen Prozesse rein reversibel sind und keinen wesentlichen Zusammenhang mit der Wärmeleitung haben. Damit ist, wie besonders Boltzmann<sup>2)</sup> ausgeführt hat, die Bedingung für eine thermodynamische Ableitung der Thomsonschen thermoelektrischen Gleichungen erfüllt. Thermokraft  $e_{12}$  und Peltierwärme  $\Pi_{12}$  zweier Metalle ergeben sich dann aus ihren Thomsonkoeffizienten gemäß den Gleichungen

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d e_{12}}{dT} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{T}, \\ \Pi_{12} = T e_{12}. \end{array} \right.$$

Eine sehr angenäherte Erfüllung dieser Gleichungen kann heute als experimentelle Tatsache betrachtet werden.<sup>3)</sup>

Unsere Voraussetzungen erlauben auch die Anwendung des Nernstschen Wärmetheorems, aus dem das Verschwinden von  $e_{12}$ ,  $\Pi_{12}$  und  $\sigma$  im absoluten Nullpunkte gefolgt werden kann. Das Nullwerden der Thermokraft ist in der Tat von Kamerlingh Onnes und Holst<sup>4)</sup> für das Beispiel Au-Ag konstatiert worden.

Theoretisch und für die Aufsuchung von Gesetzmäßigkeiten in bezug auf das periodische System sind besonders die thermoelektrischen Funktionen von Interesse, die (im Gegensatz zu Thermokraft und Peltierwärme) einem einzigen Metalle gehören. Wir können  $\sigma$  als die spezifische Wärme der beweglichen Elektrizität im Metalle auffassen und bilden analog die molekulare Energie der beweglichen Elektrizität

$$(7) \quad U = \int_0^T \sigma dT + U_0,$$

1) E. Lecher, I. c.

2) L. Boltzmann, Wiener Ber. 46. p. 1258. 1888.

3) Der Verfasser wird etwa gleichzeitig mit dieser Schrift eine neue Prüfung veröffentlichen.

4) Vgl. W. H. Keesom, Physik. Zeitschr. 14. p. 674. 1913.

wo  $U_0$  durch die mittlere potentielle Energie der Elektronen

$$\frac{\Sigma \varphi}{s}$$

im absoluten Nullpunkte bestimmt ist; weiter die Entropie der beweglichen Elektrizität

$$(8) \quad e = \int_0^T \frac{\sigma}{T} dT,$$

aus deren Differenzen für zwei Metalle die Thermokraft hervor geht; die latente Wärme der beweglichen Elektrizität

$$(9) \quad \Pi = T \int_0^T \frac{\sigma}{T} dT,$$

die die Peltierwärme bestimmt, und die freie Energie

$$(10) \quad F = \int_0^T \sigma dT - T \int_0^T \frac{\sigma}{T} dT - U_0.$$

Alle diese Größen können bis auf  $U_0$  einfach durch Thermokraftmessungen bestimmt werden, sobald wir nur für ein einziges Vergleichsmetall die Thomsonwärme bis zu so tiefen Temperaturen zu messen vermögen, daß mit Sicherheit auf Null extrapoliert werden kann.

8. Thermokraft und Peltierwärme werden, wie wir aus den Gleichungen (6) oder (8) und (9) im Vergleich mit den Kurven der Thomsonwärme (Fig. 2) verstehen können, im allgemeinen recht komplizierte Temperaturfunktionen. Daß trotzdem bei einer gegebenen Temperatur gewisse Legierungsreihen sehr charakteristische, teilweise geradlinige Konzentrationskurven<sup>1)</sup> zeigen, scheint damit zusammenzuhängen, daß die charakteristischen Temperaturen dieser Legierungen sehr hoch sind, so daß wir uns bei gewöhnlicher Temperatur noch auf den tiefsten Ästen der Wellenlinien der Thomsoneffekte (vgl. Fig. 2) befinden, und somit besonders einfache Verhältnisse erwarten können. Übrigens gibt die vorliegende

1) G. Borelius, l. c. Ausführliches wird hierüber in einer bald erscheinenden Festschrift zur 250. Jahrfeier der Universität zu Lund berichtet werden.

Hypothese gute Hoffnung, die Thermoelektrizität der Legierungen in ihren Einzelheiten aufzuklären zu können, worauf jedoch hier noch nicht eingegangen werden kann.

Die Verschiedenheit der thermoelektrischen Effekte in den verschiedenen Richtungen eines Kristalles können wir wohl am leichtesten so erklären, daß mit dem Strome in den verschiedenen Richtungen Elektronen bewegt werden, die verschiedene Stellungen im Raumgitter einnehmen. Diese Erklärungsweise ist mit unseren Voraussetzungen im guten Einklange, wenn wir noch bemerken, daß der große Einfluß der Stromrichtung besonders bei den ziemlich schlechten Leitern, wie z. B. das Wismut, beobachtet worden ist.

Zum Schlusse müssen wir auch bemerken, daß die Haltbarkeit unserer Hypothese natürlich damit aufs engste zusammenhängt, ob die Erscheinungen der Elektrizitäts- und Wärmeleitung von denselben Grundvorstellungen aus als befriedigend erklärt werden können. Diese Frage muß jedoch vorläufig offen gelassen werden.

Lund, im Mai 1918.

(Eingegangen 29. Mai 1918.)

5. *Über die Ionenwanderung in den flüssigen  
Kristallen von Ammoniummoleathydrat;  
von O. Lehmann.*

Bei den zähflüssigen Kristallen der regulären Modifikation des Jodsilbers beobachtete ich merkwürdige Formänderungen und Verschiebungen beim Durchleiten eines elektrischen Stromes, welche Folge der verschiedenen Wanderungsgeschwindigkeit der Jodionen in den Kristallen und in der umgebenden Schmelze oder Lösung zu sein schienen.<sup>1)</sup> Diese Deutung lag nahe, da E. Warburg gefunden hatte, daß in natriumhaltigen Quarzkristallen nur die Natriumionen wandern. Eine andere Erklärung jener auffälligen Vorgänge ist bis jetzt nicht bekannt geworden.

Nachdem inzwischen schleimig-flüssige Kristalle, insbesondere bei Ammoniummoleathydrat, aufgefunden und hinsichtlich ihrer Struktur eingehend untersucht worden sind<sup>2)</sup>, drängte sich die Frage auf, ob auch bei diesen solche oder ähnliche Formänderungen und Bewegungen durch Ionenwanderung hervorgebracht werden könnten. Versuche, die ich neuerdings in dieser Richtung ausgeführt habe, bestätigen die Vermutung, wenn auch die Erscheinungen durchaus andere sind als bei Jodsilber.

Zu diesen Versuchen benutzte ich zur Abstufung der Spannung einen Kurbel-Abzweigrheostaten gleicher Art wie

1) O. Lehmann, Wied. Ann. 24. p. 23, 26. 1885; Molekularphysik 1. p. 826. 1888; Wied. Ann. 38. p. 396. 1889; Elektrizität und Licht p. 256. 1895; Flüssige Kristalle p. 173, 360. 1904; J. Frick, Physik. Technik. 7. Aufl. 2 (1) p. 283. 1907; O. Lehmann, Die neue Welt der flüssigen Kristalle p. 164ff. 1911.

2) Derselbe, Molekularphysik 1. p. 522. Figg. 279 u. 180. 1888; Wied. Ann. 56. p. 771. 1895; Zeitschr. f. physik. Chem. 18. p. 91. 1895; Sitzungsber. Heidelb. Akad. Nr. 13. 1913; Ann. d. Phys. 48. p. 725. 1915; Die Lehre von den flüssigen Kristallen. Wiesbaden, J. F. Bergmann 1918. p. 275 ff. u. 473 ff.

bei den früheren Versuchen<sup>1)</sup>, welcher ermöglicht, den Anschlußklemmen einer elektrischen Lichtleitung von 110 Volt 36 verschiedene Spannungen, von Null bis 110 Volt steigend, zu entnehmen und den Strom durch Umlegen eines Kommutators umzukehren. Derselbe nimmt nur wenig Raum ein und ist in der Handhabung sehr bequem (Fig. 1, a Kommutator, b Sicherung). Leicht bieg-  
same Leitungsschnüre führen den Strom zu den auf einer (in der Mitte zum Zwecke des Lichtdurchganges durchbrochenen) Ebonitplatte (in federnden Klemmen verschiebbar) befestigten Platinelektroden (Fig. 2).

Letztere liegen dem Objektträger (Format  $6 \times 9$  cm) dicht auf und sind an den Enden dünn geschlagen. Der Abstand der Spitzen beträgt 30 mm.

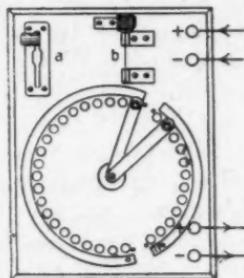


Fig. 1.

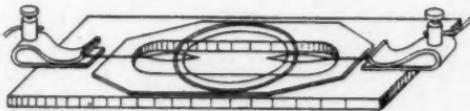


Fig. 2.

Im einfachsten Falle wird etwas sirupartiges, flüssig-kristallinisches Ammoniumoleathydrat in eine enge, dünne Kapillare (lichte Weite 0,06 mm) eingesaugt, ein 6 mm langes Stück derselben abgebrochen, mitten auf den Objektträger gelegt und mit einem flachen (Savonette-) Uhrglas (Durchmesser 47 mm) die konvexe Seite nach unten bedeckt, wobei als Unterlagen für das



Fig. 3.

Uhrglas zwei längere Stücke derselben Kapillare dienen, die in einem Abstande zu beiden Seiten der das Präparat enthaltenden Kapillare parallel aufgelegt werden (Fig. 3). Sodann läßt man mittels eines Tropfglases Salmiakgeist (mit Ammoniak

1) Nach meinen Vorschlägen hergestellt von E. Feldhausen, Mechaniker des Physik. Instituts der Techn. Hochschule in Aachen.

gesättigtes Wasser) unter das Uhrglas fließen, so daß die Spitzen der Elektroden ca. 3—4 mm in dasselbe eintauchen. Wird der Strom nicht geschlossen, so sieht man, wie schon früher beschrieben<sup>1)</sup>, aus den Enden der Kapillare langsam „Myelinformen“ herauswachsen, indem das Ammoniumoleat-hydrat mit dem Wasser des Salmiakgeistes sich zu dem myelin-förmigen, wasserreicherem Hydrat verbindet. Die Grenze der beiden Hydrate erscheint körnig.

Schließt man nun den Strom, so tritt sofort an dem der positiven Elektrode zugewendeten Ende der Kapillare Beschleunigung, am anderen Ende Verzögerung des Wachstums der Myelinformen ein, falls die Spannung nur ca. 4 Volt beträgt, und steigert man dieselbe auf 110 Volt, so tritt geradezu

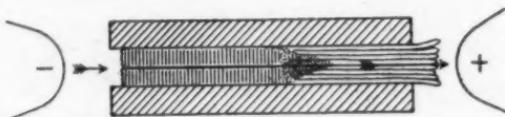


Fig. 4.

ein Flüssigkeitsstrom aus dem erstgenannten Ende der Kapillare aus mit fein-fadenförmigen Myelinformen (Fig. 4), die aber alsbald abreißen und sich auflösen, während an dem der Kathode zugewendeten Ende die Bildung der Myelinformen ganz zum Stillstande kommt und nur eine schwache Strömung gegen die Röhre hin zu beobachten ist. In kurzer Zeit ist dann die körnige, nach außen schlank kegelförmig zugespitzte Grenze der beiden Hydrate durch die ganze Röhre hindurch gegen die Kathode hin fortgewandert, also alles wasserärmeren Hydrat aufgezehrt und auch alles wasserreichere mit der Strömung ausgetrieben, so daß die Kapillare leer erscheint. Die Strömung der Flüssigkeit kehrt sich nun um und wird nur bei Umkehr des Stromes wieder die frühere.

Hat *Anschmiegeung* des wasserärmeren Ammoniumoleats an die Rohrwandung stattgefunden, welche besonders leicht eintritt, wenn das Präparat etwas Alkohol enthält und durch Erwärmung und folgende Abkühlung Ausscheidung der flüssigen Kristalle in der Röhre bewirkt wird, so treten zwischen ge-

1) O. Lehmann, *Physik. Zeitschr.* 19. p. 98. Fig. 73. 1918.

kreuzten Nicols in früher beschriebener Weise<sup>1)</sup>, der radialen Lage der optischen Achsen entsprechend, der Achse parallele *farbige Interferenzstreifen* auf, von welchen namentlich das Blau II. Ordnung besondere Breite besitzt (Fig. 5, dichte Schraffierung links). Verschiebt sich die Grenze der beiden Hydrate beim Durchleiten des Stromes nach der Mitte zu, so nimmt die Breite des Blau II. Ordnung immer mehr ab; zunächst erscheint noch das Rot I. Ordnung (weniger dichte Schraffierung), auch dieses zieht sich zusammen, so daß schließlich nur das Gelb und Grau I. Ordnung übrigbleiben (Fig. 5,

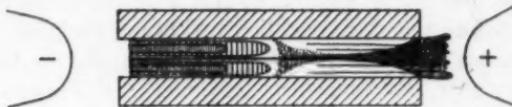


Fig. 5.

am Rande rechts, in der Mitte schwarz). Da die Doppelbrechung des wasserreicher Hydrats geringer ist als die des wasserärmeren, könnte man hieraus scheinbar auf allmählichen Übergang, also Bildung von Mischkristallen beider

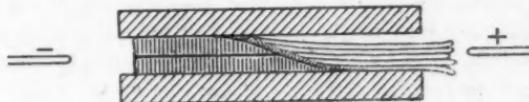


Fig. 6.

Hydrate schließen; indes ist die wahre Ursache wohl die, daß beim Eindringen des Wassers die Grenze der beiden Modifikationen nicht vertikal bleibt, sondern, wie Fig. 6 andeutet, schief wird, das wasserärmer Oleat also keilförmig ausläuft, weshalb der allmählich sich verminderten Dicke entsprechend, die Ordnung der Interferenzfarben sich erniedrigen muß. Bei geringer Spannung entsteht keine solche keilförmige Schicht, sondern es wächst aus der Röhre ein Bündel zylindrischer Myelinformen heraus, die bei gleichbleibender Dicke eine beträchtliche Länge erreichen können und schließlich von der Flüssigkeitsströmung abgerissen und mitgeführt werden.

1) O. Lehmann, Sitzungsber. Heidelb. Akad. Nr. 22. p. 17. 1911;  
Die Lehre von den flüssigen Kristallen p. 301. Figg. 45 u. 46. 1918.

Offenbar beruht die Erscheinung auf Elektrolyse des Ammoniumoleathydrats, dessen Enden sich als Sekundärelektroden verhalten. Sieht man ab von dem Vorhandensein des Ammoniaks und faßt den Vorgang außerhalb der Kapillare einfach als Elektrolyse des Wassers auf, so würde sich demgemäß an dem der Anode zugewendeten Ende der Säule von flüssig-kristallinischem Ammoniumoleathhydrat Wasserstoff ausscheiden, am anderen Sauerstoff. Diese Ionen treffen zusammen mit den aus dem Ammoniumoleathhydrat herauswandernden Ionen, nämlich die Wasserstoffionen mit Ölsäureionen, die der Anode zustreben, mit welchen sie Ölsäure bilden, die sofort mit dem reichlich in Lösung vorhandenen Ammoniak neues Ammoniumoleathhydrat bildet und so das rasche Wachstum der Myelinformen bedingt; die Sauerstoffionen andererseits begegnen den Ammoniumionen, mit welchen sie Ammoniak und Wasser bilden, also Salmiakgeist, so daß an diesem Ende der Röhre keine Änderung eintritt, soweit sie nicht durch die geringe entgegengesetzte Verschiebung der Ölsäureionen bedingt ist, welche die Zurückziehung der Myelinformen und deren Verdickung zur Folge hat.

Bequemer gestaltet sich die Beobachtung, wenn man die Kapillarröhre und die beiden Unterlagen des Deckglases ganz wegläßt, eine kleine, etwa stecknadelkopfgroße Menge des Ammoniumoleathydrats direkt auf den Objektträger bringt,



Fig. 7.

das Deckglas auflegt, es so anpreßt, daß sich das Ammoniumoleathhydrat zu einer kreisförmigen Scheibe ausbreitet, und nun Salmiakgeist herumfließen läßt. Beim Durchgang des Stromes sieht man sofort auf der der Anode zugewendeten Seite der Kreisscheibe lange zylindrische Myelin-

formen hervorquellen, welche etwa die Richtung der Strom- oder Kraftlinien annehmen (Fig. 7). Auf der entgegengesetzten Seite werden die etwa bereits gebildeten Myelinformen zurückgedrängt und zu sehr dicken Myelingebilden verdichtet. Bei starker Erhöhung der Spannung reißen einzelne Teile der Myelinformen ab und bewegen sich mit der Flüssigkeit der Anode zu, ohne aber diese zu erreichen, da sie sich vorher unter Bildung körniger oder schwammiger Flocken, die wahr-

scheinlich aus saurem Ammoniumoleathydrat bestehen, auflösen.

Die Erscheinungen werden hierbei dadurch kompliziert, daß sich auch die bekannten konvektiven Strömungen<sup>1)</sup> einstellen, besonders bei höheren Spannungen, so wie die als elektrische Diffusion, Sedimentation und Kataphorese bezeichneten Vorgänge.<sup>2)</sup> Ganz wie an den angegebenen Orten beschrieben, kann man dicht nebeneinander verlaufende entgegengesetzte Ströme, Wirbel mit vertikaler oder horizontaler Achse und Rotationen suspendierter Massen beobachten, deren genauere Analyse schwierig ist.<sup>3)</sup>

Weiter spielt die Hydrolyse, die chemische Veränderung durch weitere Wasseraufnahme an Stellen, wo der Ammoniakgehalt der Lösung vermindert ist, also namentlich in der Nähe der Elektroden, eine Rolle; wohl auch die durch Ammoniakabspaltung bedingte Bildung dünner Überzüge des zähflüssigen sauren Ammoniumoleats, die Entstehung von kolloidalen Lösungen usw., die sich der direkten Beobachtung entziehen. Auf ihr Vorhandensein ist aber zu schließen aus den merkwürdigen Formänderungen, welche die Myelinformen während des Weiterwachsens erleiden.

Die nähere Untersuchung dieser Änderungen hat vor allem eine Lücke in den bisherigen Untersuchungen zutage

1) O. Lehmann, Molekularphysik 1. p. 825. 1888; Die elektrischen Lichterscheinungen oder Entladungen p. 57. 1898; Ann. d. Phys. 6. p. 661. 1901; J. Frick, Physik. Technik. 7. Aufl. 2 (1) p. 270. 1907; 2 (2) p. 805. 1909.

2) Derselbe, Wied. Ann. 52. p. 455. 1894; Zeitschr. f. physk. Chem. 14. p. 301. 1894; Elektrochem. Zeitschr. 1894. Heft 4; J. Frick, Physik. Technik. 7. Aufl. 2 (1) p. 273. 1907.

3) Die Rotationen kommen wohl dadurch zustande, daß die suspendierten Körperchen auf der einen Seite die eine, auf der anderen die entgegengesetzte Ionenart adsorbieren, wodurch eine Änderung des Feldes entsteht, welche die Drehung bedingt. Dieselbe bleibt erhalten, weil in der umgekehrten Lage die adsorbierten Ionen durch die neu adsorbierten entgegengesetzten neutralisiert werden, so daß sich der vorhergehende Zustand wieder herstellt. In der zitierten Abhandlung (Zeitschr. physik. Chem. 14. p. 301. 1894) habe ich sie deshalb mit der Rotation von Franklin's sich selbst bewegendem Rade (Cuthbertson, Abh. v. d. Elektr. Leipzig 1786. p. 64) verglichen. Vgl. auch G. Quincke, Wied. Ann. 50. p. 481. 1896; 62. p. 12. 1897; L. Boltzmann, Wied. Ann. 60. p. 399. 1896.

gefördert, nämlich die Deutung der *abgeplatteten Myelinformen*. Solche können durch Anschmiegeung an das Glas entstehen.<sup>1)</sup> Die Annahme, daß sie *nur* auf solche Art entstehen, hat sich aber als unrichtig erwiesen; ja es dürfte wohl die abgeplattete Form als die eigentliche Grundform der wasserreicherem Kristalle zu betrachten sein.

Man sieht sie häufig ganz von selbst am Ende der zylindrischen Myelinformen auftreten (Fig. 8 a, b, c; letzteres identisch mit b, aber um die Längsachse um  $90^\circ$  gedreht). Die

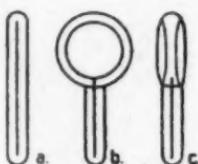


Fig. 8.



Fig. 9.

Struktur der zylindrischen Gebilde entspricht, wie die Beobachtung zwischen gekreuzten Nicols lehrt, der Fig. 9 a, d. h. die optischen Achsen, angedeutet durch die Schraffierung, sind überall radial gerichtet. Bei den Scheiben Fig. 8 b gilt gleiches nur für den Rand; die Fläche erscheint dagegen zwischen gekreuzten Nicols in jeder Stellung dunkel. Die optischen Achsen müssen deshalb, wie in den Figg. 9 b u. c dargestellt, zur Fläche senkrecht stehen. An der Einfügungsstelle des zylindrischen Stiels in die Scheibe muß sich eine konische Störung vorfinden, welche die Ursache ist, daß der Stiel nicht von selbst in die Scheibe eingezogen wird wie ein Fortsatz, den man künstlich durch Deformation der Scheibe erzeugt.<sup>2)</sup> Im natürlichen Lichte ist die Grenze zwischen dem homogenen Teile der Scheibe und dem Rande mit radialer Struktur kaum zu sehen, insofern die Scheibe eben oder schwach bikonvex ist.<sup>3)</sup> Der Stiel kann verschiedene Dicke

1) O. Lehmann, Sitzungsber. d. Heidelb. Akad. Nr. 13. Taf. 1, Fig. 3; Taf. 2, Figg. 1 u. 2; Taf. 4. 1913. Ann. d. Phys. 48. p. 763. Figg. 78 u. 79. 1915.

2) Derselbe, Ann. d. Phys. 48. p. 764. Figg. 80 u. 81. 1915.

3) Vgl. Sitzungsber. d. Heidelb. Akad. Nr. 13. Taf. 4, Fig. 1; Taf. 5, Fig. 3. 1913.

haben und auch ganz fehlen, so daß die Scheibe vollkommen symmetrisch wird (Fig. 10). Ebenso wie die Zylinderform (Fig. 8 a) stellt also auch die Scheibenform eine normale stabile Struktur der wasserreichenen flüssigen Kristalle des Ammoniummoleats dar. Nach Deformation sucht die Gestaltungskraft diese Struktur wiederherzustellen, ähnlich wie die Oktaeder- oder Doppelkegelform der flüssigen Kristalle des wasserärmeren Ammoniummoleats.

Auf Grund der Beobachtungen über das Zusammenfließen und über das sonstige hydrodynamische Verhalten habe ich geschlossen, daß die Moleküle des wasserärmeren Ammoniummoleats blättchenförmig sein müssen, quer zur Längsrichtung der Kristalle stehen<sup>1)</sup> und sich parallel ihrer Fläche leicht aneinander verschieben; daß ferner hierdurch eine Anisotropie der thermischen Bewegung bedingt ist, derart, daß die Expansivkraft in der Richtung senkrecht zur Fläche der Blättchen vergrößert erscheint, weshalb eben die flüssigen Kristalle nicht Kugelform annehmen, sondern sich in der Richtung der Blättchennormale soweit ausstrecken, bis der dadurch geweckte kapillare Gegendruck den Überschuß der Expansivkraft nach dieser Richtung kompensiert.

Die Entstehung der zylindrischen und scheibenartigen Normalform der wasserreicherer flüssigen Kristalle läßt sich nicht in dieser Weise erklären. Entweder müßte man annehmen, daß diese Blättchenmoleküle sich parallel ihrer Fläche schwerer aneinander verschieben als senkrecht dazu, was unwahrscheinlich ist, oder daß die Form der Moleküle stäbchenförmig sei und diese Stäbchen besonders leicht in ihrer Längsrichtung aneinander gleiten. Die Expansivkraft würde dann am größten senkrecht zu den radial stehenden Stäbchen, also in der Längsrichtung der zylindrischen Myelinformen, sein und der Überschuß durch den kapillaren Gegendruck der halbkugelförmigen Kuppen an den Enden kompensiert werden. Je größer der Überschuß der Expansivkraft nach dieser Richtung, um so kleiner müßte der Radius der halbkugelförmigen Enden, somit auch des Querschnittes der Zylinder,



Fig. 10.

1) O. Lehmann, Physik. Zeitschr. 15. p. 620. 1914; Die Lehre von den flüssigen Kristallen p. 289 u. 291. 1918.

d. h. die Dicke der Myelinformen, sein.<sup>1)</sup> Dieser Auffassung würde die Beobachtung entsprechen, daß sich die scheibenförmigen Myelinformen häufig hervortretende Ränder erhalten (Fig. 11 a), welche dann scharf gegen die Fläche abgegrenzt erscheinen (Fig. 11 b).<sup>2)</sup> Die Form kann dabei mannigfach



Fig. 11.

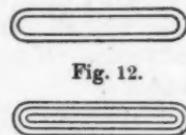


Fig. 12.



Fig. 13.



Fig. 14.



Fig. 15.

von der normalen Kreisscheibenform abweichen, z. B. stark in die Länge gezogen sein, also einem Bande mit aufgeworfenen Rändern gleichen, welches von einem Hohlzylinder schwer zu unterscheiden ist (Fig. 12). In die Höhlung zwischen den aufgeworfenen Rändern kann eine zweite zylindrische oder bandförmige Myelinform eingelagert sein, in diese selbst wieder eine dritte, so daß geschichtete, ineinandergeschachtelte Gebilde entstehen (Fig. 13). Sehr häufig wölbt sich ferner die Scheibe zur Glocke (Fig. 14) oder zur Hohlkugel (Fig. 15), wobei wieder das Innere von einer oder mehreren ähnlichen Myelinformen oder auch kugeligen ausgefüllt sein kann.



Fig. 16.



Fig. 17.



Fig. 18.



Fig. 19.



Fig. 20.



Fig. 21.



Fig. 22.

Die scheiben- und glockenförmigen Verbreiterungen der zylindrischen Myelinformen erscheinen nicht nur wie bei Fig. 8 b u. c am Ende, sondern auch an beliebigen Stellen (Fig. 16 a u. b) und von verschiedener Größe (Fig. 17), häufig in regelmäßiger Folge (Figg. 18 u. 19), auch wohl gegen-

1) O. Lehmann, Physik. Zeitschr. 14. p. 1133. 1913.

2) Vgl. auch die Photographien Sitzungsber. d. Heidelb. Akad. Nr. 13. Taf. 2, Fig. 1; Taf. 4, Figg. 2, 3, 4. 1913.

einander abwechselnd um  $90^\circ$  oder  $180^\circ$  verdreht (Figg. 20, 21 u. 22) und in gleichen Abständen (Fig. 23), was natürlich durch die Art ihrer Entstehung bedingt ist, nicht durch einen Gleichgewichtszustand der Struktur.

Beim Wachsen werden die Abstände größer, da sich das Gebilde auf seiner ganzen Länge als Elektrode verhält und neues Ammoniumoleathydrat aufnimmt, ohne daß die Dicke wächst, die eben nach der obigen Darstellungsweise durch die Anisotropie der Expansivkraft bestimmt ist. Die scheiben- und glockenförmigen Verdickungsstellen entsprechen der gleichen Anisotropie und sind wohl dadurch bedingt, daß die Ausdehnung in der Längsrichtung durch ein Hindernis erschwert wird oder daß durch irgend welche mechanische Ursachen Zusammenstauchung bedingt wird.

Änderung der Anisotropie der Expansivkraft ist möglich durch Änderung der Beschaffenheit der Moleküle, z. B. durch Aufnahme fremder Moleküle, etwa solcher von saurem Ammoniumoleat, wie sie bei abnehmendem Ammoniakgehalt der Lösung sich bilden. Es kommt deshalb vor, daß plötzlich aus einer Myelinform eine solche von geringerer Dicke hervorgeht (Fig. 24), aus dieser eine solche von noch geringerer Dicke, so daß also teleskopartige Gebilde wie Fig. 25 entstehen, wobei anscheinend an den Ansatzstellen konische Störungen auftreten, welche der Struktur Bestand verleihen. Es kommt aber auch vor, daß sich die Dicke stetig ändert und die Myelinform gleichmäßig sich verjüngend in ein feines Haar ausläuft (Fig. 26).

Bei den mannigfachen durch die elektrische Konvektion bedingten Wirbeln erscheint natürlich, daß solche durch Aufnahme fremder Moleküle (vielleicht auch durch die elektrische Wirkung absorbiertener Ionen) bedingten Gestaltänderungen *beständig wechseln* und das Myelingebilde *Leben zu gewinnen scheint*. Der Anblick der bei Stromschluß hervorwachsenden Myelingebilde (Fig. 7) erinnert in der Tat häufig an das Verhalten von Infusorien, z. B. an das Zusammenschnellen von Vortizellen (unter spiraler Aufwicklung ihres Stieles). Man kann z. B. Gebilde wie Fig. 8 b sich *wiederholt plötzlich verkürzen* und dann wieder *ausstrecken* sehen, wobei allerdings der Stiel gerade bleibt.

Ein besonders häufiger Fall ist der, daß das Ende eines geraden Zylinders sich ohne erkennbare Ursache *umbiegt* (Fig. 27). Die Ursache kann wohl keine andere sein als veränderte Stoffaufnahme auf der konkaven Seite durch eine zufällige Flüssigkeitsströmung, welche weniger konzentrierte Ammoniaklösung aus dem Hofe der Anode dahin führt. Die Krümmung verstärkt sich von selbst, da sie auch den Verlauf der elektrischen Kraftlinien so ändert, daß die konvexe Seite mehr Material aufnimmt. Da die Flüssigkeitsströmung eine zufällige ist, ist natürlich auch die Richtung der Krümmung keine bestimmte; sie kann ebenso wie die Flüssigkeitsströmung beständig sich ändern und, da letztere

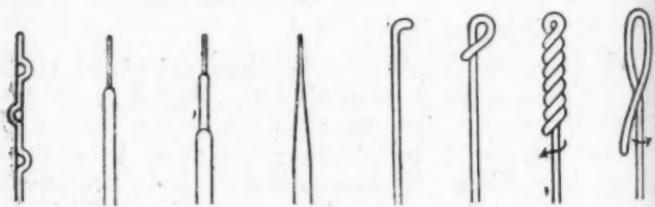


Fig. 23. Fig. 24. Fig. 25. Fig. 26. Fig. 27. Fig. 28. Fig. 29. Fig. 30.

durch den Widerstand, den sie an dem gebogenen Myelingebilde findet, aus ihrer Bahn abgelenkt wird, kann eine *regelmäßige Drehung* des letzteren die Folge sein, ja es kann sich der gekrümmte Teil um den anderen *herumwickeln* (Figg. 28 u. 29), und bei zufälliger Störung der Strömungsrichtung kann in gleicher Weise wieder *Aufwicklung* (Fig. 30) stattfinden; ein deutlicher Beweis, daß die Rotationsrichtung keine bestimmte ist. Natürlich sind diese Ausführungen nur Versuche, die Verdrillungen zu erklären, die vielleicht bei genauerer Prüfung sich unzutreffend erweisen werden; andere habe ich aber bisher nicht finden können. Zu berücksichtigen ist jedenfalls, daß die Verdrillungen auch ohne Einwirkung des elektrischen Stromes vorkommen.

Statt solcher verdrillter Formen kommen auch *zyklische Spiralen* vor (Fig. 31) oder ebene, wellenförmige Gebilde, entsprechend Fig. 22. Häufig ist ferner *Gabelung* (Fig. 32) oder mehrfache Verzweigung, wobei wieder einer

der Äste sich um einen anderen Teil herumwickeln kann. Die Zweige können auch gemäß den Figg. 14, 21 u. 22 abgeplattet oder glockenförmig sein. Durch Zusammenhäufung solcher komplizierterer Formen entstehen wirre Knäuel, die sich kaum mehr entwirren lassen (Fig. 33). Unterbricht man den Strom, so zeigen die Myelingebilde ein Bestreben, sich zusammenzuziehen, noch mehr bei Umkehr des Stromes. Indes auch bei gleichmäßig andauerndem Strome kann Kontraktion eintreten, und nicht selten beobachtet man, daß von einer Anzahl paralleler annähernd gleicher Myelinformen einzelne sich zusammenziehen, während die dicht daneben befindlichen sich ausdehnen. Auch bei ein und derselben Myelinform kann

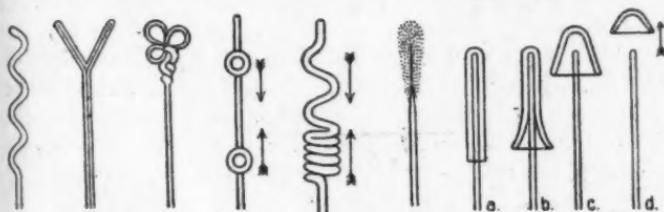


Fig. 31. Fig. 32. Fig. 33. Fig. 34. Fig. 35. Fig. 36.

Fig. 37.

an einzelnen Stellen Zusammenziehung, von anderer Ausdehnung eintreten, so daß z. B. getrennte Abplattungen, glockenförmige Auswüchse oder ausgebogene Stellen aufeinander zuwandern und sich schließlich vereinigen können (Fig. 34). Aus gleichem Grunde kann eine weit ausgezogene Spirale sich zu einer dicht gewundenen zusammenziehen (Fig. 35). Diese Vorgänge stehen mit den früher beschriebenen Wanderungen von Störungen längs Myelinformen<sup>1)</sup> augenscheinlich in Beziehung und erklären sich wohl ebenso wie die Verdrillungen; indes ist diese Auffassung aber nur eine Vermutung, die zudem noch wenig befriedigt.

Bei Auflösung der Myelinformen, wie sie bei Annäherung an den positiven Pol eintritt und besonders gut bei den gegenüber dem negativen Pol gebildeten, zusammengedrückten dicken Gebilden zu beobachten ist, wenn man den Strom

1) O. Lehmann, Die Lehre von den flüssigen Kristallen. p. 496.  
1918.

umkehrt, entsteht ein körniger Niederschlag (vermutlich von saurem Ammoniummoleat) und der unaufgelöste Teil verjüngt sich stetig zu einer oder mehreren Spitzen (Fig. 36).

Besonders interessant ist das Verhalten *ineinander geschachtelter* Myelinformen, indem dann zunächst, wie die Figg. 37 a, b, c u. d andeuten, die äußerste sich erweitert bis zur Glockenform und dann mit der Lösung fortströmt, während der Rest zunächst noch fast unverändert stehen bleibt. Solche ineinander geschachtelte Formen können auch nur geschlitzte Hülsen sein (entsprechend Fig. 18) oder es kann eine solche Hülse mehrere kleine, kugelige Glocken (Fig. 15) enthalten. Sie verdanken ihre Entstehung Zufälligkeiten bei dem Wachsen der dicht nebeneinander befindlichen Gebilde, die gewöhnlich nicht näher festgestellt werden können.

Als Hauptursache aller besprochenen Erscheinungen wäre also Neubildung von Ammoniummolehydrat durch Ionewanderung zu betrachten und Aufnahme desselben zwischen die vorhandenen Moleküle, wie beim Wachsen der Myelinformen überhaupt.

(Eingegangen 22. Juli 1918.)

---

